

Notizen zur Vorlesung

Fourieranalysis



G. Sweers

Wintersemester 25/26

Inhaltsverzeichnis

1	Eine Einführung	1
1.1	Fourier und die Wärmeleitungsgleichung	1
1.2	Beispiel mit/ohne L^∞ -Konvergenz	4
1.3	Beispiel mit L^2 -Konvergenz	7
2	Fourierreihen in Differentialgleichungen	11
2.1	Die Fourierreihenentwicklung	11
2.2	Das gespannte Seil	12
2.3	Die schwingende Saite	14
2.4	Noch ein Wärmeproblem	15
2.5	Allgemeinheit	17
3	Konvergenz der Fourierreihenentwicklung	21
3.1	Lebesgue-Räume	21
3.2	Die Berechnung der Koeffizienten	23
3.3	Eigenschaften der Koeffizienten	25
3.4	Der Dirichlet-Kern	26
3.5	Ein Kriterium bei Unstetigkeit	29
4	Alternative Approximationen	35
4.1	Gute Kerne	35
4.2	Cesàro summierbar	37

4.3	Abel summierbar	41
5	Ein Gegenbeispiel	45
5.1	Vorbereitung	45
5.2	Die Bausteine	47
5.3	Das eigentliche Beispiel	47
6	Konvergenz in $L^2(-\pi, \pi)$	51
6.1	Der Hilbertraum L^2	51
6.2	Parallelogrammgleichung	53
6.3	Approximieren in L^2	55
6.4	Vollständiges Orthonormalsystem	56
7	Fourier-Transformation in $L^1(\mathbb{R})$	59
7.1	Elementares	59
7.2	Rechenregeln bei der Fourier-Transformation	62
7.3	Approximieren mit Friedrichs	64
7.4	Der Schwartz-Raum	66
7.5	Fourier-Transformation in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	69
8	Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R})$	73
8.1	Temperierte Distributionen	73
8.2	Eigenschaften von Distributionen	76
8.3	Fourier-Transformation in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	76
8.4	Eine Übersicht	79
8.5	Eigenschaften	80
8.6	Eigenfunktionen von $\mathfrak{F}$	81
9	Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$	87
9.1	Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$	87
9.2	Fourier-Transformation via $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	89
9.3	Fourier-Transformation auf $L^p(\mathbb{R}^n)$	91

9.4	Anwendung auf die Wellengleichung	92
9.5	Lösungsformel für die Wellengleichung	95
10	Elliptische PDGI	99
10.1	Gewöhnliche DGL mit Fourier	99
10.2	Definition von elliptisch	101
10.3	Beispiele	102
10.4	Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	104
10.5	Intermezzo zu Gauß	107
11	Funktionalanalytisches	111
11.1	Kompakte Mengen	111
11.2	Kompakte Operatoren	113
11.3	Das Spektrum	113
11.4	Besonderes zum Hilbertraum	115
11.5	Lineare Abbildungen im Hilbertraum	118
11.6	Die Fredholm Alternative	119
12	Existenz Fourier-ähnlicher Reihen	127
12.1	Funktionenräume	127
12.1.1	Hölder-Räume	127
12.1.2	Sobolev-Räume	128
12.2	Das Lösen des Dirichlet-Laplace-Problems auf $B_1(0)$	130
12.3	Das Lösen des Dirichlet-Laplace-Problems auf Ω	133
12.4	Der erste Eigenwert	135
13	Rechnen mit Fourier-ähnlichen Reihen	143
13.1	Schwache Lösungen	143
13.2	Rayleigh-Quotient	144
13.3	Eigenfunktion und Raum	148
13.4	Eigenfunktionen auf speziellen Gebieten	149
13.4.1	Rechtecken	149

13.4.2 Die Kreisscheibe	150
13.4.3 Die Kugel	151
Literaturverzeichnis	153
Index	154

Fourieranalysis

Eine Einführung



Kapitel 1

1.1 Fourier und die Wärmeleitungsgleichung

Die Verteilung der Temperatur u in einem Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ wird modelliert durch die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega. \quad (1.1)$$

Diese Gleichung modelliert die stationäre Wärmeleitung auf Ω . Auf dem Rand des Körpers wird die Temperatur gemessen, beschrieben wird das durch

$$u = u_{\text{Rand}} \text{ auf } \partial\Omega, \quad (1.2)$$

und gefragt ist u innerhalb des Körpers. Mit $\partial\Omega$ wird der Rand von Ω angegeben, wobei man Ω offen nimmt. Wenn man (x, y, z) als Koordinaten nimmt, wird der Differentialoperator

wie folgt:

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$



Abbildung 1.1: Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830

Das Randwertproblem (1.1)-(1.2) wurde Anfang des 19. Jahrhunderts erforscht und Fourier hat in [6] wesentlich zum Verständnis beigetragen. Es führte ihn zu Approximationen von Funktionen und die dazugehörige Theorie nennt man heutzutage Fourieranalysis.

Definition 1.1.1 Eine Funktion u , die $\Delta u = 0$ auf Ω erfüllt, nennt man **harmonisch** auf Ω .

Man nennt Δ den **Laplace¹-Differentialoperator**.

Fängt man etwas Neues an, dann versucht man erst den einfachsten Fall zu verstehen und das wäre für das Randwertproblem der Fall

$$\Omega = B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } x^2 + y^2 < 1\}.$$

Hier ist Ω nur zweidimensional, jedoch ist

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

in $\mathbb{R}^2$ immer noch ein partieller Differentialoperator.

Das Model Problem wird

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(x, y) = u_{\text{Rand}}(x, y) & \text{für } x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

wobei u_{Rand} auf dem Rand vorgeschrieben ist. Für die Differentialgleichung gibt es einfache Lösungen in der Form von

¹Pierre Simon Laplace, 1749-1827

speziellen Polynomen in (x, y) :

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= 1, & u_{1,o}(x, y) &= y, \\ u_{1,e}(x, y) &= x, & u_{2,o}(x, y) &= 2xy, \\ u_{2,e}(x, y) &= x^2 - y^2, & u_{3,o}(x, y) &= 3x^2y - y^3, \\ u_{3,e}(x, y) &= x^3 - 3xy^2, & u_{4,o}(x, y) &= 4x^3y - 4xy^3, \\ u_{4,e}(x, y) &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4, & & \text{usw.} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.1.2 Wenn komplexe Funktionen einem bekannt sind, dann weiß derjenige, dass

$$\begin{aligned} u_{m,e}(x, y) &= \operatorname{Re}((x + iy)^m) \text{ und} \\ u_{m,o}(x, y) &= \operatorname{Im}((x + iy)^m). \end{aligned}$$

Realteil und Imaginärteil von analytischen Funktionen wie $z \mapsto z^m$, sind harmonisch.

Wenn diese Bemerkung Neuland für Sie ist, kann man die Aussage auch direkt zeigen. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \Delta u_{3,e}(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (x^3 - 3xy^2) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 (x^3 - 3xy^2) \\ &= 6x - 6x = 0. \end{aligned}$$

Oder man kann sich überlegen, dass für die komplexe Ableitung von $f(z) = z^m$ auf $\mathbb{C}$ gilt, dass

$$f'(z) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = mz^{m-1},$$

und für die reellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) &= m(x + iy)^{m-1} = f'(x + iy), \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) &= im(x + iy)^{m-1} = if'(x + iy). \end{aligned}$$

So folgt

$$\Delta f(x + iy) = f''(x + iy) + i^2 f''(x + iy) = 0.$$

Dann sind auch Linearkombinationen dieser Polynome $u_{m,e}$ und $u_{m,o}$ harmonisch.

Kann man mit solchen Kombinationen einen gegebenen Randwert u_{Rand} approximieren?

Die Randfunktion kann man beschreiben mit dem Winkel als Parameter $x = \cos \varphi$ und $y = \sin \varphi$. Bemerke, dass $(x, y) \in \partial B$ bedeutet, dass $x^2 + y^2 = 1$.

Betrachtet man die Randwerte der Funktionen $u_{m,e}$ und $u_{m,o}$, und schreibt man diese als Funktion von φ , also

$$\tilde{u}_{m,e}(\varphi) := u_{m,e}(\cos \varphi, \sin \varphi) \text{ usw.},$$

so findet man:

$\tilde{u}_0(\varphi) = 1,$	
$\tilde{u}_{1,e}(\varphi) = \cos \varphi,$	$\tilde{u}_{1,o}(\varphi) = \sin \varphi,$
$\tilde{u}_{2,e}(\varphi) = (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2,$	$\tilde{u}_{2,o}(\varphi) = 2 \cos \varphi \sin \varphi$
$= \cos(2\varphi)$	$= \sin(2\varphi)$
$\tilde{u}_{3,e}(\varphi) = \dots = \cos(3\varphi),$	$\tilde{u}_{3,o}(\varphi) = \dots = \sin(3\varphi),$
$\tilde{u}_{4,e}(\varphi) = \dots = \cos(4\varphi),$	$\tilde{u}_{4,o}(\varphi) = \dots = \sin(4\varphi),$
usw.	

Diese Gleichungen sieht man mit Hilfe der **Eulerschen² Formel**:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \text{ für } \varphi \in \mathbb{R}.$$

²Leonhard Euler, 1707-1783

Wenn $f(z) = z^m$, dann folgt aus

$$u_{m,e}(x + iy) = \operatorname{Re} f(x + iy),$$

dass

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{m,e}(\varphi) &= u_{m,e}(\cos \varphi, \sin \varphi) = \operatorname{Re} ((\cos \varphi + i \sin \varphi)^m) \\ &= \operatorname{Re} ((e^{i\varphi})^m) = \operatorname{Re} (e^{im\varphi}) = \cos(m\varphi). \end{aligned}$$

Ähnlich liefert $u_{m,o}(x + iy) = \operatorname{Im} f(x + iy)$, dass

$$\tilde{u}_{m,o}(\varphi) = \operatorname{Im} ((\cos \varphi + i \sin \varphi)^m) = \sin(m\varphi).$$

Setzt man $\tilde{u}_{\text{R}}(\varphi) := u_{\text{Rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi)$, so wird die Frage: Welche Funktionen $\tilde{u}_{\text{R}}$ kann man approximieren mit Linearkombinationen von

$$\mathcal{B}_{\text{F}} := \{1, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos(2\varphi), \sin(2\varphi), \cos(3\varphi), \sin(3\varphi), \dots\}. \quad (1.4)$$

Definition 1.1.3 Sei $\mathcal{B} = \{u_k\}_{k \in I}$ eine Menge von Funktionen $u_k : D \rightarrow E$ und mit I eine möglicherweise unendliche Indexmenge.

Man nennt eine Funktion $u : D \rightarrow E$ eine **Linearkombination** von Funktionen aus $\mathcal{B}$, wenn es endlich viele Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_\ell$ in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und Indizes $k_1, k_2, \dots, k_\ell \in I$ gibt derart, dass

$$u = c_1 u_{k_1} + c_2 u_{k_2} + \dots + c_\ell u_{k_\ell} \text{ auf } D.$$

Für alle solche (endliche) Linearkombinationen schreibt man $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}[\mathcal{B}]$ (oder $\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}[\mathcal{B}]$).

Weil

$$\text{Span}_{\mathbb{C}} [\cos(n\varphi), \sin(n\varphi)] = \text{Span}_{\mathbb{C}} [e^{in\varphi}, e^{-in\varphi}],$$

kann man statt Linearkombinationen von $\mathcal{B}_F$ ebenso auch Linearkombinationen nehmen von

$$\mathcal{B}'_F := \{e^{in\varphi}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (1.5)$$

und findet die gleichen Linearkombinationen. Mit der Eulerschen Formel sieht man nämlich direkt, dass

$$e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \text{ und } e^{-in\varphi} = \cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi)$$

als auch umgekehrt

$$\cos(n\varphi) = \frac{1}{2}e^{-in\varphi} + \frac{1}{2}e^{in\varphi} \text{ und } \sin(n\varphi) = \frac{i}{2}e^{-in\varphi} - \frac{i}{2}e^{in\varphi}.$$

Weil die Funktionen in $\mathcal{B}_F$ ($\mathcal{B}'_F$) beliebig oft differenzierbar sind, sind Linearkombinationen solcher Funktionen das auch. Beim Approximieren mit Linearkombinationen $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ werden meistens immer mehr Elemente aus $\mathcal{B}_F$ verwendet und das bedeutet, dass man festlegen muss, wann und wie eine solche Approximationsfolge konvergiert. Das bedeutet auch, dass man Konvergenz bei Funktionenfolgen festlegen muss. Das wird uns im größten Teil des Skripts beschäftigen.

1.2 Beispiel mit/ohne L^∞ -Konvergenz

Wir werden hier zwei Beispiele vorstellen mit unterschiedlichem Benehmen. Für eine strukturierte Behandlung werden wir uns in den nächsten Wochen erst mit der Theorie beschäftigen müssen. Hier brauchen wir schon die folgenden Ergebnisse aus Analysis 1:

Lemma 1.2.1 Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist entweder für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent, oder es gibt einen **Konvergenzradius** $r \in [0, \infty)$. Dieses r ist derart, dass

1. wenn $|z| < r$, dann konvergiert $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n z^n$;
2. wenn $|z| > r$, dann divergiert $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n z^n$.

Für $|z| = r$ kann man ohne weiteres keine Aussage zu Konvergenz oder Divergenz machen.

Lemma 1.2.2 Nehme an, die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hat Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Funktion

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wohl definiert für $|z| < r$, beliebig oft (komplex) differenzierbar für $|z| < r$ und es gilt:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \text{ für } |z| < r.$$

Beispiel 1.1 Die Funktionen

$$u_m(\varphi) := \sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\varphi)}{2^n} \text{ für } \varphi \in [0, 2\pi]$$

sind Linearkombinationen aus $\mathcal{B}_F$. Wir wollen zeigen, dass u_m konvergiert für $m \rightarrow \infty$.

Betrachten wir

$$U_m(z) := \sum_{n=0}^m \frac{z^n}{2^n},$$

dann folgt $u_m(\varphi) = \operatorname{Im}(U_m(\cos \varphi + i \sin \varphi))$. Weil für $|z| < 2$ (der Konvergenzradius) gilt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2}{2 - z},$$

konvergiert $U_m(z)$ für $|z| \leq 1$ gleichmäßig nach $U_\infty(z) = \frac{2}{2-z}$. Dann konvergiert $u_m(\varphi)$ nach $\operatorname{Im}(U_\infty(\cos \varphi + i \sin \varphi))$ gleichmäßig für $\varphi \in [0, 2\pi]$. Weil

$$\begin{aligned} U_\infty(\cos \varphi + i \sin \varphi) &= \frac{2}{2 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)} \\ &= \frac{2 - \cos \varphi + i \sin \varphi}{(2 - \cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = \frac{2 - \cos \varphi + i \sin \varphi}{5 - 4 \cos \varphi}, \end{aligned}$$

findet man, gleichmäßig für $\varphi \in [0, 2\pi]$, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(\varphi) = u_\infty(\varphi) := \frac{\sin \varphi}{5 - 4 \cos \varphi},$$

Die letzte Gleichung kann man auch mit Hilfe einer Norm schreiben:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u_\infty\|_\infty = 0. \quad (1.6)$$

Man kann sogar zeigen, dass die Ableitung gleichmäßig konvergiert:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u'_m - u'_\infty\|_\infty = 0. \quad (1.7)$$

Wenn man noch die Temperaturverteilung $\operatorname{Re}(U(x + iy))$ sehen möchte, dann findet man die links in Abbildung 1.5. $\square$

Aufgabe 1.1 Sei $u_m(\varphi) := \sum_{n=1}^m 2^{-n} \sin(n\varphi)$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

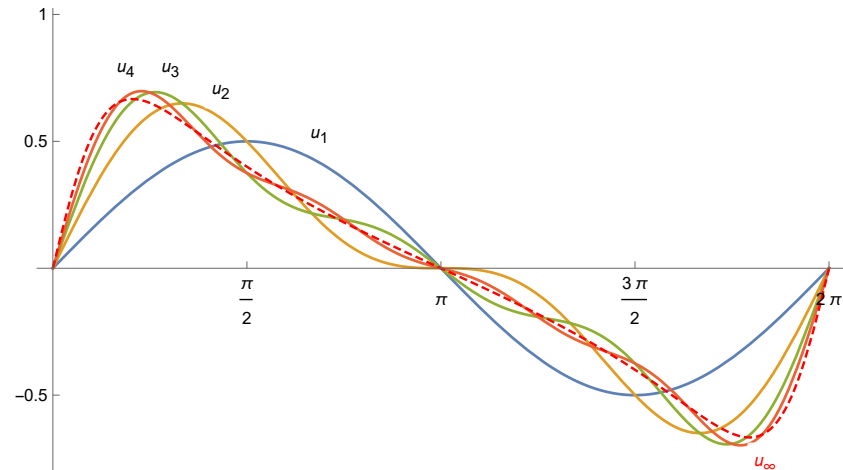


Abbildung 1.2: u_1, u_2, u_3, u_4 und u_∞ für Beispiel 1.1

1. Berechnen Sie die Ableitungen $u'_m(\varphi)$ und $u'_\infty(\varphi)$.
2. Zeigen Sie (1.7) via U'_m und U'_∞ .

Definition 1.2.3 Man definiert die L^∞ -Norm für stetige Funktionen $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) durch

$$\|u\|_\infty := \max_{x \in [0, 2\pi]} |u(x)|. \quad (1.8)$$

Bemerkung 1.2.4 Diese Norm kann man auch erweitern für beschränkte Funktionen $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) durch

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in [0, 2\pi]} |u(x)|. \quad (1.9)$$

Weil stetige Funktionen auf eine kompakte Menge einen Extremwert haben, gilt da $\sup = \max$ und ist (1.9) tatsächlich eine Erweiterung von (1.8).

Wenn Ihnen Lebesgue-Integrale bekannt sind, dann wissen Sie, dass

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &:= \operatorname{ess-sup}_{x \in (0, 2\pi)} |u(x)| \\ &= \inf \{M \geq 0; [|u(x)| > M] \text{ ist } L\text{-Nullmenge}\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

eine andere Erweiterung ist, die bessere Eigenschaften hat. Dieses **wesentliche Supremum** lässt **Lebesgue-Nullmengen**³ außer Betracht. Zum Beispiel sind Mengen von endlich oder abzählbar vielen Punkten Nullmengen.

Wenn die Potenzreihe mit Konvergenzradius r konvergiert bei einem w mit $|w| = r$, dann gibt es das folgende Ergebnis von Abel⁴:

Theorem 1.2.5 (Abel) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = r$ derart, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n w^n = \ell \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt

$$\lim_{t \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (tw)^n = \ell.$$

Aufgabe 1.2 Im Internet finden Sie schon einen Beweis. Schreiben Sie diesen Beweis für alle verständlich auf.

³Henri Léon Lebesgue, 1875-1941

⁴Niels Henrik Abel, 1802-1829

Beispiel 1.2 Auch die Funktionen

$$u_m(\varphi) := \sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\varphi)}{n} \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi] \quad (1.11)$$

sind Linearkombinationen aus $\mathcal{B}_F$ und auch hier wollen wir die mögliche Konvergenz betrachten.

Schreiben wir

$$U_m(z) = \sum_{n=1}^m \frac{z^n}{n},$$

dann gilt auch hier

$$u_m(\varphi) = \operatorname{Im} (U_m(e^{i\varphi})).$$

Außerdem brauchen wir

$$U_\infty(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Das Letzte ist eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius gleich 1. Man kann sogar zeigen, dass diese Potenzreihe konvergiert auf

$$\{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1 \text{ und } z \neq 1\}.$$

Wenn $|z| < 1$, dann gilt

$$U'_\infty(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

und es folgt⁵

$$U_\infty(z) = -\operatorname{Log}(1-z) \quad \text{für } |z| < 1.$$

Es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(\varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(U_m(e^{i\varphi})) = \operatorname{Im}\left(\lim_{m \rightarrow \infty} U_m(e^{i\varphi})\right)$$

und aus dem Theorem von Abel folgt dann für $\varphi \in (0, 2\pi)$, dass

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(e^{i\varphi}) &= \lim_{r \uparrow 1} U_\infty(re^{i\varphi}) = -\lim_{r \uparrow 1} \operatorname{Log}(1 - re^{i\varphi}) \\ &= -\operatorname{Log}(1 - e^{i\varphi}). \end{aligned}$$

Man findet für $\varphi \in (0, 2\pi)$, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(-\operatorname{Log}(1 - e^{i\varphi})) &= -\operatorname{Arg}(1 - e^{i\varphi}) \\ &= -\operatorname{Arg}(1 - \cos \varphi - i \sin \varphi) \\ &= -\arctan\left(\frac{-\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}\right) = \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{2 \sin(\frac{1}{2}\varphi) \cos(\frac{1}{2}\varphi)}{2 \sin(\frac{1}{2}\varphi)^2}\right) \\ &= \arctan(\cot(\frac{1}{2}\varphi)) = \arctan(\tan(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi)) \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi. \end{aligned}$$

⁵Der **komplexe Logarithmus** wird generell wie folgt definiert:

$$\operatorname{Log}(w) = \ln|w| + i\operatorname{Arg}(w) \quad \text{für } w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

mit $\operatorname{Arg}(w) \in (-\pi, \pi)$. Das Argument wird definiert als der Winkel von $[0, w]$ mit der positiven reellen Achse und gegen den Uhrzeigersinn gemessen.

Also gilt für $\varphi \in (0, 2\pi)$, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(\varphi) = u_\infty(\varphi) := \frac{1}{2}(\pi - \varphi). \quad (1.12)$$

Für $\varphi \in \{0, 2\pi\}$ findet man $u_m(\varphi) = 0$ und wäre $u_\infty(\varphi) = 0$ der Grenzwert. Dann ist u_∞ jedoch keine stetige Funktion.

Es gibt auch keine andere Möglichkeit u_∞ in $\{0, 2\pi\}$ zu einer stetigen, periodischen Funktion zu ändern, da

$$\lim_{\varphi \downarrow 0} \frac{1}{2}(\pi - \varphi) = \frac{1}{2}\pi \neq -\frac{1}{2}\pi = \lim_{\varphi \uparrow 2\pi} \frac{1}{2}(\pi - \varphi).$$

Die Abschätzung in (1.6) passt hier auch nicht, denn für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|u_m - u_\infty\|_\infty \geq \frac{1}{2}\pi.$$

Skizze zu der Temperaturverteilung findet man rechts in Abbildung 1.5. $\square$

Aufgabe 1.3 Zeigen Sie die letzte Ungleichung.

1.3 Beispiel mit L^2 -Konvergenz

Man sieht zwar, dass die Funktionen in (1.11) auf irgendeine Art konvergieren, jedoch nicht in der L^∞ -Norm. Die folgende Norm passt hier besser:

Definition 1.3.1 Man definiert die **L^2 -Norm** für stetige Funktionen $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) durch

$$\|u\|_2 := \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

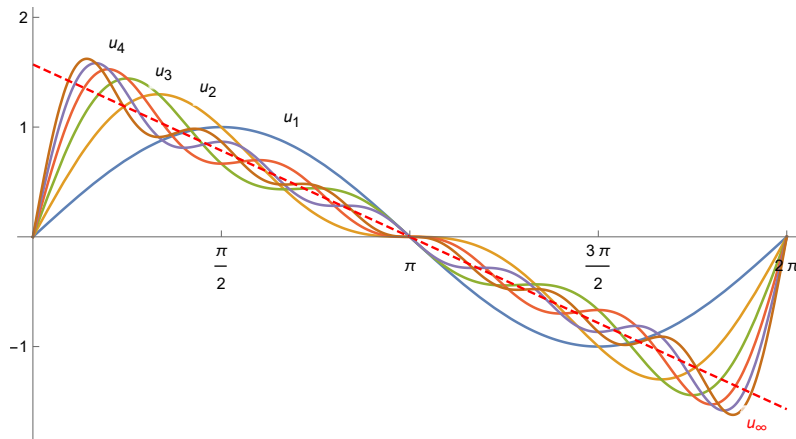


Abbildung 1.3: u_1 bis u_6 und u_∞ für Beispiel 1.2 ...

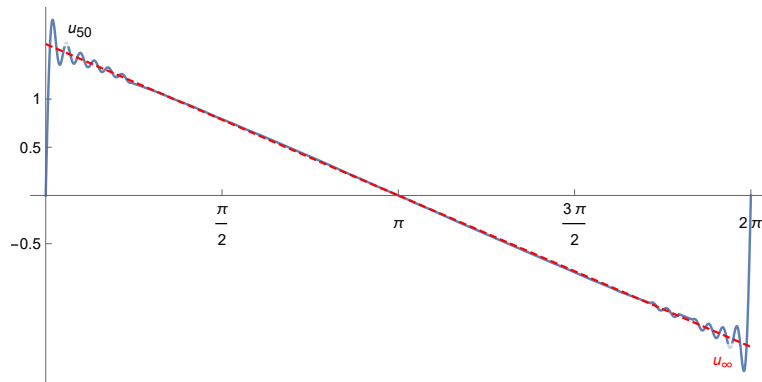


Abbildung 1.4: ... und u_m für m groß (hier $m = 50$) „zittert“ beim Springen. Dies ist bekannt als das Gibbsche Phänomen

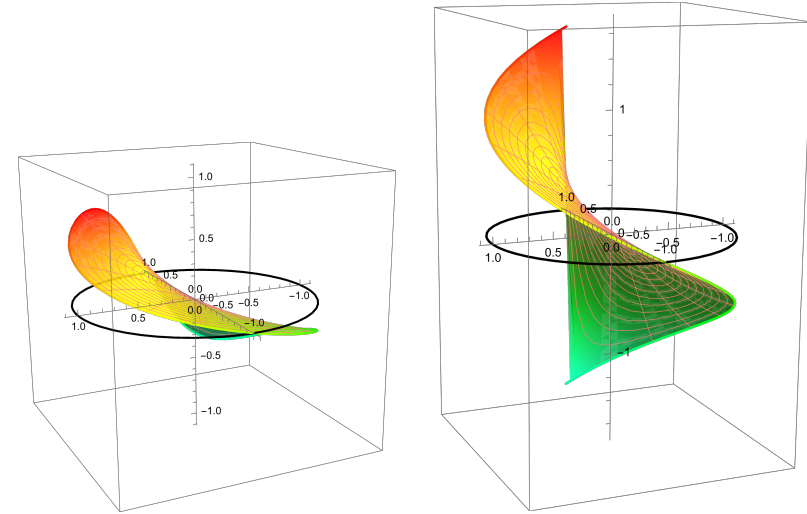


Abbildung 1.5: Skizzen zu $z = u(x, y)$ mit u der Lösung von (1.3) bei den letzten beiden Beispielen für $u_{\text{Rand}}(\cos \varphi, \sin \varphi) = u_\infty(\varphi)$

Aufgabe 1.4 Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm ist für die stetigen Funktionen $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.5 1. Zeigen Sie, dass

$$\|u\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|u\|_\infty$$

für alle stetigen Funktionen $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion $v_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|v_n\|_\infty \geq n \|v_n\|_2.$$

Diese Aufgabe zeigt, dass $\|\cdot\|_2$ eine schwächere Norm ist als $\|\cdot\|_\infty$. Man kann diese Norm erweitern zu den quadratisch

integrierbaren Funktionen auf $[0, 2\pi]$. Ein Problem dabei ist jedoch, dass $\|u\|_2 = 0$ nicht bedeutet, dass $u(x) = 0$ für alle $x \in [0, 2\pi]$. Das Integral merkt ja nicht den Wert der Funktion in einzelnen Punkten: Für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{für } x \in [0, 2\pi] \setminus \mathbb{N}, \end{cases}$$

gilt

$$\|f\|_2 = 0.$$

Man löst dies, indem man statt einzelne Funktionen Äquivalenzklassen von Funktionen betrachtet:

Definition 1.3.2 Sei $f_1, f_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

1. Man sagt

$$f_1 \cong f_2$$

oder $f_1 = f_2$ **fast überall**, wenn

$$\{x \in [0, 2\pi]; f_1(x) \neq f_2(x)\}$$

eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Man kann zeigen, dass alle Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit $f \cong f_1$ eine Äquivalenzklasse bilden.

2. Wenn $\int_0^{2\pi} |f_1(x)|^2 dx$ wohldefiniert ist in $[0, \infty)$, dann sagt man: f_1 ist quadratisch integrierbar und die Äquivalenzklasse von f_1 liegt in $L^2(0, 2\pi)$.

3. $L^2(0, 2\pi)$ ist die Menge aller solchen Äquivalenzklassen.

Dann folgt aus $\int_0^{2\pi} |f_1(x)|^2 dx = 0$, dass $f_1 \cong 0$. Wenn für die Äquivalenzklasse $\mathbf{f}$ von f_1 gilt, dass $\|f_1\|_2 = 0$, dann gilt $f_1 \cong 0$. Das heißt, dass $0 \in \mathbf{f}$ und man nennt dies die Nullklasse. Auf Äquivalenzklassen von quadratisch integrierbaren Funktionen betrachtet, ist $\|\cdot\|_2$ eine Norm. In der Praxis werden Funktionen und deren Äquivalenzklassen durcheinander verwendet. Man soll jedoch im Auge behalten, dass für solche Funktionen ihr Wert auf Nullmengen nicht wichtig ist.

Beispiel 1.3 Das letzte Beispiel werden wir hier weiter verfolgen und zeigen, dass für u_m in (1.11) und u_∞ in (1.12) gilt, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_\infty - u_m\|_2 = 0.$$

Für $\varphi \in (0, 2\pi)$, und nicht für $\varphi \in \{0, 2\pi\}$, gilt mit Abel, dass

$$U_\infty(e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow \infty} U_\infty(re^{i\varphi}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{e^{in\varphi}}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(e^{i\varphi})$$

und weil da $u_\infty(\varphi) = \operatorname{Re}(U_\infty(e^{i\varphi})) = \operatorname{Re}(\lim_{r \rightarrow \infty} U_\infty(re^{i\varphi}))$, bedeutet das

$$u_\infty(\varphi) - u_m(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m+1}^k \frac{\sin(n\varphi)}{n}.$$

Weil

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(\tilde{n}x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq \tilde{n}, \\ \pi & \text{für } n = \tilde{n}, \end{cases}$$

folgt für $k > m$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |u_k(\varphi) - u_m(\varphi)|^2 d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=m+1}^k \frac{\sin(n\varphi)}{n} \right)^2 d\varphi \\
 &= \sum_{n=m+1}^k \sum_{\tilde{n}=m+1}^k \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n\varphi)}{n} \frac{\sin(\tilde{n}\varphi)}{\tilde{n}} d\varphi \\
 &= \sum_{n=m+1}^k \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(n\varphi)}{n} \right)^2 d\varphi \\
 &= \sum_{n=m+1}^k \frac{1}{n^2} \pi \\
 &\leq \int_{t=m}^k \frac{1}{t^2} dt \pi \leq \frac{1}{m} \pi.
 \end{aligned}$$

Mit dominierter Konvergenz findet man

$$\int_0^{2\pi} |u_\infty(\varphi) - u_m(\varphi)|^2 d\varphi \leq \frac{1}{m} \pi$$

und mit der Wurzel folgt

$$\|u_\infty - u_m\|_2 \leq \sqrt{\frac{\pi}{m}} \rightarrow 0$$

für $m \rightarrow \infty$. □

Die Beispiele dienen um zu zeigen, dass die Konvergenzfrage bei so einer Reihenentwicklung nicht trivial ist. Außerdem sah man, dass man bei beschränkten Funktionen nur Konvergenz in L^2 -Norm erwarten kann.

Fourieranalysis

Fourierreihen in Differentialgleichungen



Kapitel 2

2.1 Die Fourierreihenentwicklung

Definition 2.1.1 Wenn $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) derart ist, dass es Konstanten $f_{k,e}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $f_{k,o}$ für $k \in \mathbb{N}^+$ gibt mit

$$f(x) = f_{0,e} + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \left(f_{n,e} \cos(nx) + f_{n,o} \sin(nx) \right), \quad (2.1)$$

dann nennt man die rechte Seite von (2.1) die **Fourierreihenentwicklung** von f . Sie verwendet die Funktionen in $\mathcal{B}_F$ aus (1.4).

In (2.1) steht eine punktweise Konvergenz, aber wie wir in den Beispielen gesehen haben, ist es vielleicht die L^2 -Konvergenz, die man generell erwarten kann. Auch dann wird es eine Fourierreihenentwicklung genannt.

Bemerkung 2.1.2 Wenn (2.1) gilt, dann gibt es auch Konstanten c_k für $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}. \quad (2.2)$$

Oft wird auch (2.2) die Fourierreihenentwicklung von f genannt.

Die Koeffizienten in (2.1) und (2.2) kann man direkt umrechnen:

$$c_k = \frac{1}{2} (f_{k,e} - i f_{k,o}) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^+,$$

$$c_0 = f_{0,e},$$

$$c_k = \frac{1}{2} (f_{-k,e} + i f_{-k,o}) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}^-,$$

und umgekehrt

$$f_{0,e} = c_0,$$

$$f_{k,e} = c_k + c_{-k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^+,$$

$$f_{k,o} = i c_k - i c_{-k} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^+.$$

Was man nun die Fourierreihenentwicklung nennt, ist nur eine Frage der Bequemlichkeit. Für reelle Funktionen findet man mit (2.1) reelle Koeffizienten. Für komplexe Funktionen findet man in (2.2) eine einfachere Formel, jedoch fast immer mit komplexen Koeffizienten.

Beides nennt man auch eine **Reihenentwicklung in trigonometrischen Funktionen**. Das ist jedoch etwas unspezifisch, wie wir in den nächsten Anwendungen sehen werden.

2.2 Das gespannte Seil

Wenn man ein Seil zwischen zwei Aufhängepunkten spannt und an einigen Stellen seitwärts zieht, dann wird ein einfaches Modell gegeben durch das folgende Randwertproblem

$$\begin{cases} u''(x) + f(x) = 0 & \text{für } x \in [0, \pi], \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \{0, \pi\}. \end{cases}$$

Die Aufhängepunkte haben Entfernung π und die Kurve vom Seil wird parametrisiert durch $(x, u(x))$. Das Fixieren an den Enden liefert $u(0) = 0 = u(\pi)$. Die Funktion f liefert auf dem Seil eine seitwärts gerichtete Kraft und gefragt ist die Auslenkung u .

Für $k \in \mathbb{N}^+$ passt zusammen:

$$f(x) = \sin(kx) \implies u(x) = \frac{1}{k^2} \sin(kx).$$

Das Problem ist linear. Das heißt, dass wenn u_1 eine Lösung ist für f_1 und u_2 für f_2 , dann ist $u := c_1 u_1 + c_2 u_2$ eine Lösung für $f := c_1 f_1 + c_2 f_2$.

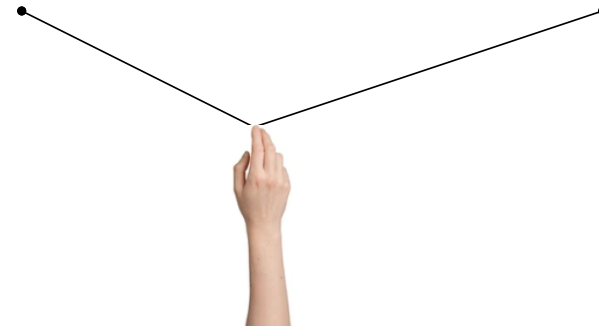


Abbildung 2.1: Das Seil wird seitwärts gezogen, nicht von Hand, sondern durch Kraftdichte f

Für

$$f(x) = \sum_{k=1}^m c_k \sin(kx)$$

folgt so als Lösung

$$u(x) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{k^2} \sin(kx).$$

Die Frage, die dann kommt, ist:

Welche Funktionen auf $[0, \pi]$ kann man approximieren mit

$$\mathcal{B}_{FS} = \{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \dots\}?$$

Das sieht erst mal anders aus, als die Funktionen in $\mathcal{B}_F$. Sehr anders ist das jedoch nicht:

Lemma 2.2.1 Wenn man $L^\infty(0, 2\pi)$ -Funktionen in der Norm $\|\cdot\|_{L^2(0, 2\pi)}$ approximieren kann mit Funktionen aus $\text{Span}_{\mathbb{R}}[\mathcal{B}_F]$, dann kann man auch $L^\infty(0, \pi)$ -Funktionen in der Norm $\|\cdot\|_{L^2(0, \pi)}$ approximieren mit Funktionen aus $\text{Span}_{\mathbb{R}}[\mathcal{B}_{FS}]$.

Man kann das Ergebnis variieren, wenn man L^∞ ersetzt durch L^2 oder $\text{Span}_{\mathbb{R}}$ durch $\text{Span}_{\mathbb{C}}$. Die Normen im Lemma bleiben gleich.

Beweis. Wenn $u \in L^\infty(0, \pi)$, dann gilt für die Funktion

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in [0, \pi], \\ -u(x - \pi) & \text{für } x \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

dass $\tilde{u} \in L^\infty(0, 2\pi)$. Dann kann man

$\tilde{u}_m \in \text{Span}_{\mathbb{R}}[1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(mx), \sin(mx)]$ finden und zwar derart, dass

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_m\|_{L^2(0, 2\pi)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Sei also

$$\tilde{u}_m = \gamma_0 + \sum_{k=1}^m (\gamma_{k,e} \cos(mx) + \gamma_{k,o} \sin(mx)),$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - \tilde{u}_m\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 &= \int_0^{2\pi} (\tilde{u}(x) - \tilde{u}_m(x))^2 dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\tilde{u}(x)^2 - 2\gamma_0 \tilde{u}(x) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^m (\gamma_{k,e} \cos(mx) + \gamma_{k,o} \sin(mx)) \tilde{u}(x) \right) dx \\ &\quad + 2\pi\gamma_0^2 + \pi \sum_{k=1}^m (\gamma_{k,e}^2 + \gamma_{k,o}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^\pi \left(u(x)^2 - 2 \sum_{k=1}^m \gamma_{k,o} \sin(mx) \tilde{u}(x) \right) dx \\ &\quad + 2\pi\gamma_0^2 + \pi \sum_{k=1}^m (\gamma_{k,e}^2 + \gamma_{k,o}^2) \\ &\geq 2 \int_0^\pi \left(u(x)^2 - 2 \sum_{k=1}^m \gamma_{k,o} \sin(mx) \tilde{u}(x) \right) dx + \pi \sum_{k=1}^m \gamma_{k,o}^2 \\ &\geq \|u - u_m\|_{L^2(0, \pi)}^2 \end{aligned}$$

für

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_{k,o} \sin(mx).$$

Die Approximation u_m auf $[0, \pi]$ passt besser (oder gleich gut) als $\tilde{u}_m$ auf $[0, 2\pi]$ und liegt in

$$\text{Span}_{\mathbb{R}}[\sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(mx)].$$

Wenn $\|\tilde{u} - \tilde{u}_m\|_{L^2(0, 2\pi)} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, dann gilt also auch $\|u - u_m\|_{L^2(0, \pi)} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. ■

Definition 2.2.2 Wenn $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) derart ist, dass es Konstanten f_k für $k \in \mathbb{N}^+$ gibt mit

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m f_n \sin(nx), \quad (2.3)$$

dann nennt man die rechte Seite von (2.3) die **Fourier-sinusreihenentwicklung** von f .

Bemerkung 2.2.3 Wenn man die Funktionen in $\mathcal{B}_{FS}$ nach $[0, 2\pi]$ skaliert, findet man

$$\mathcal{B} = \left\{ \sin\left(\frac{1}{2}x\right), \sin(x), \sin\left(\frac{3}{2}x\right), \sin(2x), \dots \right\}. \quad (2.4)$$

Weil diese Folge deutlich anders aussieht als $\mathcal{B}_F$ für $[0, 2\pi]$, könnte man sich wundern, ob das wirklich passt. Für jede Funktion $u \in \text{Span}_{\mathbb{R}}[\mathcal{B}]$ mit $\mathcal{B}$ aus (2.4) gilt zum Beispiel $u(0) = u(2\pi) = 0$.

Da muss man bedenken, dass die Konvergenz in L^2 -Norm den Wert in einzelnen Punkten $x \in [0, 2\pi]$ nicht sieht. Und auch mit $\mathcal{B}_F$ konnte man in Beispiel 1.2 eine Funktionen auf $[0, 2\pi]$ approximieren mit $u(0) \neq u(2\pi)$, obwohl jede Funktion in $\text{Span}_{\mathbb{R}}[\mathcal{B}_F]$ in 0 und in 2π identische Werte hat.

2.3 Die schwingende Saite

Die schwingende Saite ist ein zeitabhängiges Randwertproblem bei der eindimensionalen Wellengleichung. Das heißt, die gesuchte Lösung ist eine Funktion abhängig von einer Raumvariablen und von der Zeit:

$$\begin{cases} c^2 u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) = 0 & \text{für } x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t) & \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Die Konstante c ist positiv und wird bestimmt durch das Material der Saite und die Spannung auf der Saite. Die beiden Enden der Saite werden festgehalten und daher die Randbedingungen $u(0, t) = 0$ und $u(\pi, t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Man findet für $k \in \mathbb{N}$ Lösungen

$$u(x, t) = \sin(kx) \cos(ckt) \quad (2.6)$$

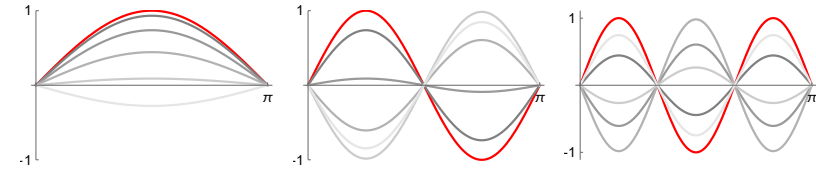


Abbildung 2.2: Drei Lösungen aus (2.6) mit $k = 1, 2, 3$ bei verschiedenem t

und auch $u(x, t) = \sin(kx) \sin(ckt)$.

Hadamard hat mal gesagt, dass eine vernünftige Differentialgleichung Rand- und Anfangswerte braucht und zwar derart, dass genau eine Lösung existiert. Das Problem in (2.5) hat noch sehr viele Lösungen. Um genau eine Lösung zu haben, kann man zum Beispiel Anfangswerte für $t = 0$ festlegen und bekommt dann:

$$\begin{cases} c^2 u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) = 0 & \text{für } x \in (0, \pi), t > 0, \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t) & \text{für } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{für } x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{für } x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (2.7)$$

Es braucht hier 2 Anfangsbedingungen, weil die Differentialgleichung zwei Ableitungen in t hat. Die Funktion f gibt die Position der Saite und die Funktion g die Anfangsgeschwindigkeit, beide jeweils x -abhängig.

Eine Funktion wie in (2.6) gibt

$$u(x, 0) = \sin(kx) \text{ und } u_t(x, 0) = 0$$

und die Funktion $u(x, t) = \sin(kx) \sin(ckt)$ liefert

$$u(x, 0) = 0 \text{ und } u_t(x, 0) = ck \sin(kx).$$

So findet man, wenn

$$f(x) = \sum_{k=1}^m f_k \sin(kx) \text{ und } g(x) = \sum_{k=1}^m g_k \sin(kx),$$

dann folgt als Lösung von (2.7)

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^m \left(f_k \cos(ckt) + \frac{g_k}{ck} \sin(ckt) \right) \sin(kx). \quad (2.8)$$

Hier werden also auch die Funktionen aus $\mathcal{B}_{\text{FS}}$ verwendet.

Will man nun Funktionen f und g approximieren und zwar derart, dass die Differentialgleichung Sinn macht, dann sollen nicht nur

$$\sum_{k=1}^m f_k \sin(kx) \text{ und } \sum_{k=1}^m g_k \sin(kx)$$

konvergieren, sondern auch die Approximationen für u_{xx} und u_{tt} . Es sei denn, man kann diese Differentialgleichung in eine schwächere Form klären.

Bei Saiteninstrumenten werden diese Lösungen tatsächlich hörbar, indem die zeitabhängigen Wellen $\cos(ckt)$ und $\sin(ckt)$ ihre Energie durch Reibung an die Umgebung übertragen. Ein besseres Modell hat noch einen Reibungsterm:

$$c^2 u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) + w u_t(x, t) = 0 \quad (2.9)$$

mit $w > 0$ eine (sehr kleine) Reibungskonstante.

Aufgabe 2.1 Berechnen Sie den Ersatz für (2.8) wenn die Differentialgleichung in (2.7) ersetzt wird durch (2.9).

Der Grundton wird wiedergegeben durch den Term $k = 1$. Die Obertöne sind durch $k \geq 2$ gegeben und sind jeweils $k - 1$ Oktave höher. Beim Klavier und bei der Gitarre mit relativ schweren Saiten und wenig Reibung gibt das ganzzahlige Verhältnisse einen Klang, den wir als schön empfinden. Bei einer Geige wird die Schwingung durch den Steg stark auf der Decke weitergegeben. Durch die größere Reibung werden nicht nur die Obertöne in der Saite gestört, sondern im hölzernen Klangkasten entstehen nicht direkt Obertöne. Vielleicht empfinden wir es daher als einen etwas schärferen Klang.

2.4 Noch ein Wärmeproblem

Für das rechteckige Gebiet $R = (0, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in R, \\ u(a, y) = 0 & \text{für } y \in [0, b], \\ u(x, 0) = f(x) & \text{für } x \in [0, a], \\ u_x(0, y) = 0 & \text{für } y \in [0, b], \\ u(x, b) = g(x) & \text{für } x \in [0, a]. \end{cases} \quad (2.10)$$

Man kann dieses Problem physikalisch beschreiben als eine stationäre Wärmeleitung mit folgenden Randbedingungen:

- Auf der rechten Seite wird die Temperatur auf 0 gehalten.
- Auf der unteren Seite wird die Temperatur durch f gegeben.
- Auf der linken Seite ist das Gebiet isoliert: Keine Wärme geht herein oder heraus und das gibt 0 als Normalableitung.

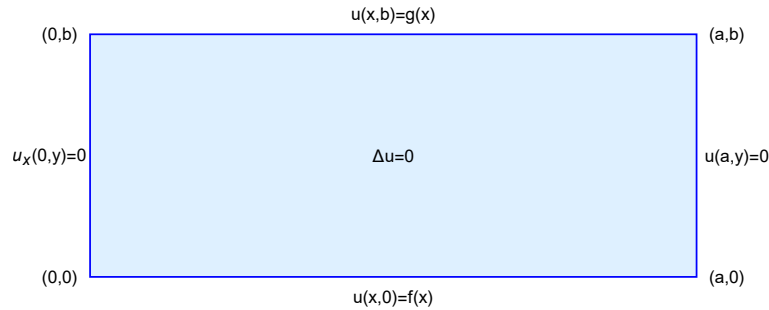


Abbildung 2.3: Das Randwertproblem in (2.10)

- Auf der oberen Seite wird die Temperatur durch g gegeben.

Für $f(x) = \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} x\right)$ und $g(x) = 0$ findet man die Lösung

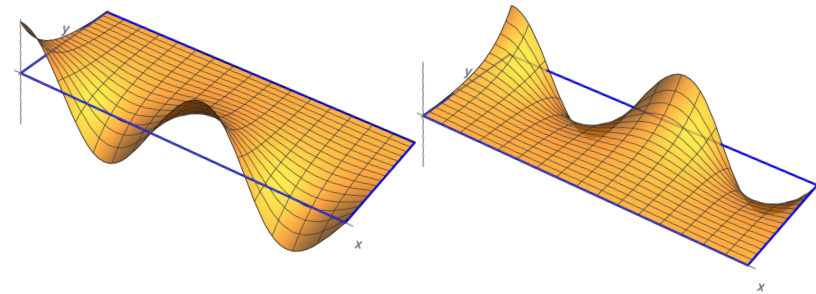
$$u(x, y) = \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} x\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) (b - y)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) b\right)}. \quad (2.11)$$

Für $f(x) = 0$ und $g(x) = \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} x\right)$ findet man die Lösung

$$u(x, y) = \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} x\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) y\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) b\right)}. \quad (2.12)$$

Wenn man eine Funktion $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben kann mittels

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} x\right) \quad (2.13)$$

Abbildung 2.4: Funktionen aus (2.11) und (2.12) mit $k = 3$

und die ähnliche Annahme für g , dann kann man (2.10) lösen durch

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} x\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) (b - y)\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) b\right)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_k \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a} x\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) y\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) b\right)}.$$

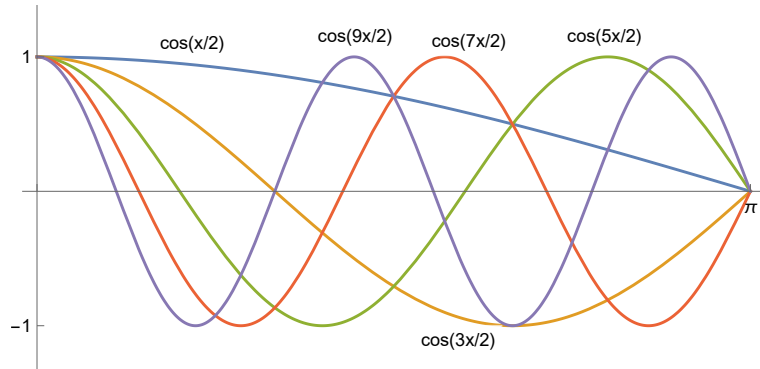
Aufgabe 2.2 Formulieren und zeigen Sie ein ähnliches Ergebnis wie in Lemma 2.2.1 mit $\mathcal{B}_F$ (auf $[0, 2\pi]$) und

$$\mathcal{B} = \left\{ \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right) x\right) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (2.14)$$

für Funktionen auf $[0, \pi]$.

Hinweis: Erweitern Sie $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ zu $\tilde{u} : [-\pi, \pi]$ mittels $\tilde{u}(x) = u(|x|)$ und verwenden Sie das Lemma.

Eine Skizze der ersten Funktionen aus (2.14) finden Sie in Abbildung 2.5. In (2.14) stehen nur Cosinus-Funktionen, aber

Abbildung 2.5: Die Funktionen in (2.13) für $\pi = a$

es sind nicht die Funktionen für die Standard Reihenentwicklung mit Cosinus-Funktionen. Das sind nämlich die Folgenden:

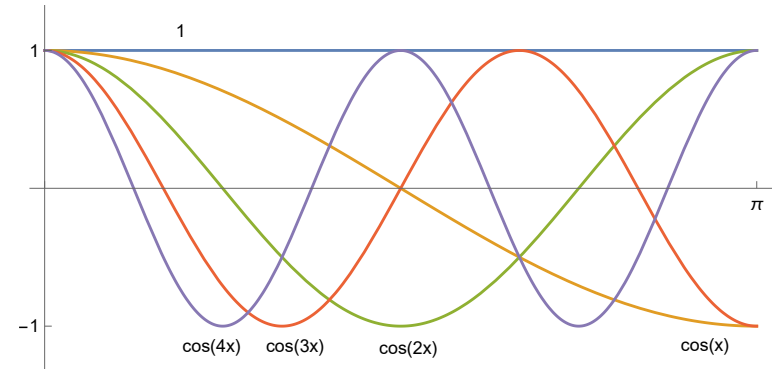
Definition 2.4.1 Wenn $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) derart ist, dass es Konstanten f_k für $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m f_k \cos(kx), \quad (2.15)$$

dann nennt man die rechte Seite von (2.15) die **Fourier-cosinusreihenentwicklung** von f . Setzen wir

$$\mathcal{B}_{FC} = \{\cos(kx)\}_{k \in \mathbb{N}}. \quad (2.16)$$

Für $k = 0$ findet man $\cos(0x) = 1$ und das ist kein Fehler. Um alle $f \in L^\infty(0, \pi)$ approximieren zu können braucht es die konstante Funktion. Eine Skizze der ersten Funktionen aus $\mathcal{B}_{FC}$ finden Sie in Abbildung 2.6.

Abbildung 2.6: Die ersten Funktionen in $\mathcal{B}_{FC}$

Lemma 2.4.2 Wenn man $L^\infty(0, 2\pi)$ -Funktionen in der Norm $\|\cdot\|_{L^2(0, 2\pi)}$ approximieren kann mit Funktionen aus $\text{Span}_{\mathbb{R}}[\mathcal{B}_F]$, dann kann man auch $L^\infty(0, \pi)$ -Funktionen in der Norm $\|\cdot\|_{L^2(0, \pi)}$ approximieren mit Funktionen aus $\text{Span}_{\mathbb{R}}[\mathcal{B}_{FC}]$.

Der Beweis ist ähnlich wie für Lemma 2.2.1.

2.5 Allgemeinheit

Solche Reihenentwicklungen waren notwendiges Ingenieurwissen aus alten Zeiten, als man froh war, zumindestens auf rechteckigen und runden Gebieten eine Lösung für ein Randwertproblem bei einer partiellen Differentialgleichung zu finden und zu approximieren. Ein Antiquariat für Bücher hatte das Buch von Churchill [2], in dem man ganz viele Beispiele findet. Leider passen die Fourierentwicklungen mit Sinus und Kosinus selten mehr, wenn das Gebiet nicht rechteckig ist. Eine Warze auf einem rechteckigen Gebiet (siehe Abbildung 2.7) sorgt

schon dafür, dass es keine speziellen Lösungen in der Form $a(x)b(y)$ mehr gibt, wie in (2.11) und (2.12). Wenn das Gebiet kreisförmig ist, dann kann man mit $a(r)b(\varphi)$ manchmal weiterkommen (oder mit $a(r)b(\varphi)c(\theta)$ in 3 Dimensionen), aber dann hat man es auch gehabt mit den expliziten Approximationen durch $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_{FS}$, $\mathcal{B}_{FC}$ oder ähnliche Funktionen bei PDGL.

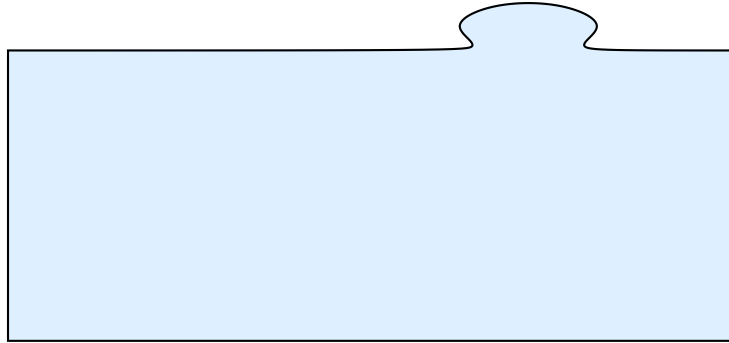


Abbildung 2.7: Kein rechteckiges Gebiet

Es wird Zeit, **Gebiet** mal genau zu definieren:

Definition 2.5.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

- Wir nennen Ω ein Gebiet, wenn es offen und zusammenhängend ist.
- Wir nennen Ω ein Gebiet, wenn es $R > 0$ gibt mit $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$.

Für offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist **zusammenhängend** einfach zu definieren: für jedes paar Stellen $x, y \in \Omega$ gibt es eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Wenn man jedoch mit einem rechteckigen Gebiet zu tun hat, welche Reihenentwicklung sollte man nehmen?

Für eine besondere Lösung in der Form einer Reihenentwicklung bei einer partiellen Differentialgleichung sucht man einen **Produktansatz**. Das heißt, man versucht in 2 Dimensionen mit Funktionen der Form

$$u(x, y) = v(x)w(y) \text{ oder } u(x, y) = \alpha(r)\beta(\varphi)$$

eine Vereinfachung zu erreichen. In 3 Dimensionen versucht man ein Produkt von drei Funktionen zu finden, die jeweils von einer der drei Koordinaten abhängen.

Beispiel 2.1 Für das Problem auf $R = (0, a) \times (0, b)$

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in R, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{für } (x, y) \in [0, a] \times \{0\} \\ u(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in \partial R. \end{cases}$$

nimmt man eine Approximation von f mit den passenden Randbedingungen in $(0, 0)$ und $(a, 0)$, also

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

und sucht die Lösung in der Form

$$u(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right). \quad (2.17)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \left(c_k(y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right) \\ &= \left(c_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 c_k(y) \right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right), \end{aligned}$$

und das bedeutet, c_k muss eine Lösung des folgenden Problems sein:

$$\begin{cases} c_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 c_k(y) = 0 & \text{für } 0 < y < b, \\ c_k(0) = 0, \\ c_k(b) = 1. \end{cases}$$

Man findet

$$c_k(y) = \frac{\sinh\left(\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 y\right)}{\sinh\left(\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 b\right)}.$$

Diese Funktion setzt man in (2.17) ein und findet, wenn es konvergiert, als Lösung

$$u(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 y\right)}{\sinh\left(\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 b\right)} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right).$$

□

Beispiel 2.2 Man kann manchmal auch eine inhomogene Differentialgleichung mit Fourier lösen. Für das Problem auf $R = (0, a) \times (0, b)$

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y) & \text{für } (x, y) \in R, \\ u(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in \partial R. \end{cases} \quad (2.18)$$

betrachtet man das zugehörige **Eigenwertproblem**

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) & \text{für } (x, y) \in R, \\ u(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in \partial R, \end{cases} \quad (2.19)$$

mit einer passenden Zahl λ . Von (2.19) sucht man nicht-triviale Lösungen $u(x, y) = v(x)w(y)$ und λ :

$$\begin{cases} \Delta (v(x)w(y)) = \lambda v(x)w(y) & \text{für } (x, y) \in R, \\ v(x)w(y) = 0 & \text{für } (x, y) \in \partial R. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung wird

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = \lambda v(x)w(y)$$

und weil wir nicht-triviale Funktionen suchen, kann man (fast überall) dividieren:

$$\frac{v''(x)}{v(x)} + \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda.$$

Die Koordinaten x und y sind unabhängig und dann folgt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda_1 \quad \text{und} \quad \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda_2$$

mit λ_1 und λ_2 Konstanten und $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Durch die Randbedingungen $v(0) = 0$ und $v(a) = 0$ finden wir

$$\begin{aligned} v(x) &= \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \quad \text{für } \lambda_1 = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \\ w(y) &= \sin\left(\frac{\ell\pi}{b} y\right) \quad \text{für } \lambda_2 = -\left(\frac{\ell\pi}{b}\right)^2. \end{aligned}$$

Wenn

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} c_{k\ell} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{b} y\right),$$

dann folgt

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{-c_{k\ell}}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{b}\right)^2} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{b} y\right),$$

jedenfalls, wenn die Reihe konvergiert. □

Die bekanntesten partiellen Differentialgleichungen sind:

- die Laplace-Poisson Gleichungen, oder stationäre Wärmeleitungsgleichung genannt, und die ist mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$:

$$-\Delta u(x) = f(x),$$

- die Wärmeleitungsgleichung:

$$(\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t)$$

- und die Wellengleichung

$$(\partial_t^2 - c^2 \Delta) u(x, t) = f(x, t).$$

Durch Δ als Differentialoperator auf die Raumvariablen wirkend, führt ein rechteckiges Gebiet mit dem Produktansatz und die Suche nach speziellen „einfachen“ Lösungen zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \text{ für } x \in (a, b). \quad (2.20)$$

Es hängt dann von den Randbedingungen ab, welche Funktionen als spezielle Lösungen bequem sind.

- Für (2.20) mit u periodisch folgt, nach Skalierung zu $(a, b) = (0, 2\pi)$, dass man e^{inx} mit $\lambda_n = n^2$ für $n \in \mathbb{Z}$ findet, also die Funktionen in $\mathcal{B}_F$.
- Für (2.20) mit $u(a) = 0$ und $u(b) = 0$ folgt, nach Skalierung zu $(a, b) = (0, \pi)$, dass man $\sin(nx)$ mit $\lambda_n = n^2$ für $n \in \mathbb{N}^+$ findet, also die Funktionen in $\mathcal{B}_{FS}$.
- Für (2.20) mit $u'(a) = 0$ und $u'(b) = 0$ folgt, nach Skalierung zu $(a, b) = (0, \pi)$, dass man $\cos(nx)$ mit $\lambda_n = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ findet, also die Funktionen in $\mathcal{B}_{FC}$.

Auch $u'(a) = 0$ und $u(b) = 0$ führt zu einem verwandten System und all diese Systeme führen mit gespiegelten Erweiterungen zurück auf $\mathcal{B}_F$.

Übrigens gibt es auch Produktansätze für radialsymmetrische Gebiete. Auf einer Kreisscheibe verwendet man Polarkoordinaten und sucht spezielle Lösungen in der folgenden Form:

$$u(r, \varphi) := R(r)\Phi(\varphi). \quad (2.21)$$

Für R kommt die Fourierreihe heraus. Für Φ braucht man andere Funktionen.

Aufgabe 2.3 Sei u aus (2.21) mit $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$-\Delta u = \lambda u \quad (2.22)$$

mit $\Phi(\varphi) = e^{in\varphi}$ für $n \in \mathbb{Z}$. In Polarkoordinaten gilt

$$\Delta = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + r^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2.$$

1. Welche Differentialgleichung erfüllt $R(r)$?
2. Begründen Sie, dass $R(1) = 0$ und $R'(0) = 0$ die passenden Randbedingungen sind.
3. Für welche λ gibt es eine nicht-triviale Lösung von (2.22) der Form (2.21) mit diesen Randbedingungen?

Fourieranalysis

Kapitel 3

Konvergenz der Fourierreihenentwicklung



3.1 Lebesgue-Räume

Wir sind den $L^\infty(0, 2\pi)$ -Funktionsklassen schon begegnet. Mit dem wesentlichen Supremum wurde eine Norm gegeben, die $L^\infty(0, 2\pi)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ zu einem normierten Vektorraum machte. Es gibt andere Lebesgue-Räume.

Definition 3.1.1 Man schreibt $\mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ für die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty. \quad (3.1)$$

Bemerkung 3.1.2 Das Integral, das wir hier benutzen, ist das Lebesgue-Integral. Wenn eine Funktion Riemann-integrierbar

ist, dann ist sie auch Lebesgue-integrierbar. Beim Lebesgue-Integral sieht man keinen Unterschied zwischen Funktionen, die nur auf Lebesgue-Nullmengen verschieden sind und man sagt, dass f_1 und f_2 in der gleichen Äquivalenzklasse $\mathbf{f}$ sind, wenn $f_1 = f_2$ f.ü. Wenn (3.1) endlich ist und $f \in \mathbf{f}$, dann setzt man

$$\|\mathbf{f}\|_{L^1(0, 2\pi)} = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

Die Menge aller solchen Äquivalenzklassen nennt man $L^1(0, 2\pi)$ und mit der obigen Norm wird sie ein normierter Vektorraum. Wenn deutlich ist, über welches Gebiet man integriert, schreibt man $\|\mathbf{f}\|_1 := \|\mathbf{f}\|_{L^1(0, 2\pi)}$.

Eine andere Klasse sind die auf A quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen f , mit einer Norm, der wir schon in Beispiel 1.3 begegnet sind.

Definition 3.1.3 Man schreibt $\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ für die Menge aller

quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Und wieder schreibt man schon $L^2(0, 2\pi)$ für die quadratisch integrierbaren Funktionen, obwohl es eigentlich der Raum für die Äquivalenzklassen $\mathbf{f}$ ist. Wenn f_1 und f_2 identisch sind mit Ausnahme von Lebesgue-Nullmengen, also $f_1 = f_2$ f.ü., dann gilt

$$\int_0^{2\pi} |f_1(x) - f_2(x)|^2 dx = 0.$$

Wir werden das Folgende nicht beweisen.

Theorem 3.1.4 Für die Äquivalenzklassen $L^2(0, 2\pi)$ ist $\|\cdot\|_2$, definiert durch

$$\|\mathbf{f}\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{für } f \in \mathbf{f} \in L^2(0, 2\pi),$$

eine Norm. So wird $(L^2(0, 2\pi), \|\cdot\|_2)$ zu einem normierten Raum.

Dieser normierte Raum ist sogar ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definiert durch

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

für $f \in \mathbf{f}$ und $g \in \mathbf{g}$ mit $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^2(0, 2\pi)$.

Später finden Sie mehr zum Hilbertraum.

Diese Integrale ändern sich nicht bei Funktionen aus der gleichen Äquivalenzklasse. Die Feinheiten lassen wir jetzt wieder und betrachten die Elemente von $L^2(0, 2\pi)$, als ob es Funktionen wären.

Mit der **Ungleichung¹ von Cauchy²-Schwarz³** sieht man, dass auch

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} f_1(x)g(x)dx - \int_0^{2\pi} f_2(x)g(x)dx \right| \\ & \leq \int_0^{2\pi} |f_1(x) - f_2(x)| |g(x)| dx \\ & \leq \|f_1 - f_2\|_2 \|g\|_2 = 0. \end{aligned}$$

Lemma 3.1.5 Es gilt $L^1(0, 2\pi) \supset L^2(0, 2\pi) \supset L^\infty(0, 2\pi)$ und sogar gilt:

$$\begin{aligned} \|u\|_1 & \leq \sqrt{2\pi} \|u\|_2 \quad \text{für alle } u \in L^2(0, 2\pi), \\ \|u\|_2 & \leq \sqrt{2\pi} \|u\|_\infty \quad \text{für alle } u \in L^\infty(0, 2\pi), \end{aligned}$$

Beweis. Sowohl $L^\infty(0, 2\pi)$ als auch $L^1(0, 2\pi)$ und $L^2(0, 2\pi)$ enthalten Lebesgue-integrierbare Funktionen. Die erste Ungleichung folgt mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|u\|_1 & = \int_0^{2\pi} |u(x)| dx \leq \left(\int_0^{2\pi} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = \sqrt{2\pi} \|u\|_2. \end{aligned}$$

¹Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz für Integrale:

$$\left| \int_A f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_A |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle auf A quadratisch integrierbare Funktionen.

²Augustin Louis Cauchy, 1789-1857

³Karl Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921

Die Zweite folgt aus

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\|u\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \|u\|_\infty.$$

Es reicht, die Ungleichungen zu beweisen, denn diese implizieren, dass aus $\|u\|_\infty < \infty$ folgt $\|u\|_2 < \infty$ und aus $\|u\|_2 < \infty$ folgt, dass $\|u\|_1 < \infty$. ■

Aufgabe 3.1 *Beweisen Sie die Ungleichung von Cauchy-Schwarz.*

Hinweis: Die Funktion $v : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

$$v(t) := \int_0^{2\pi} (|f(x)| + t|g(x)|)^2 dx$$

ist ein quadratisches Polynom mit einem Minimum, sagen wir für $t = t_0$, und $v(t_0) \geq 0$.

Wir brauchen noch folgendes Ergebnis aus der Funktionalanalysis, das wir hier nicht beweisen werden:

Theorem 3.1.6 *Für jede Funktion $u \in L^1(0, 2\pi)$ kann man eine Folge von stetigen, 2π -periodischen Funktionen $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ finden, derart dass*

$$\|u - u_m\|_1 \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Für jede Funktion $u \in L^2(0, 2\pi)$ kann man eine Folge von stetigen, 2π -periodischen Funktionen $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ finden, derart dass

$$\|u - u_m\|_2 \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Wenn Sie einen Beweis suchen, dann geben Sie „Friedrichschen Glätter“ oder „mollifier“ an.

Aufgabe 3.2 *Zeigen Sie, dass Ähnliches wie in Theorem 3.1.6 nicht gilt für $L^\infty(0, 2\pi)$.*

3.2 Die Berechnung der Koeffizienten

Wenn eine Funktion $f \in L^1(0, 2\pi)$ eine konvergente Fourierreihenentwicklung besitzt:

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \text{ mit } f_m(x) = \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx},$$

dann kann man mit $f_m(x)$ die Koeffizienten leicht zurückfinden: Für $|k| \leq m$ hat man

$$\int_0^{2\pi} f_m(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-m}^m c_n \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ikx} dx = 2\pi c_k,$$

denn

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-ikx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi & \text{für } n - k = 0, \\ \left[\frac{1}{i(n-k)} e^{i(n-k)x} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{für } n - k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Das liefert uns das folgende Ergebnis:

Lemma 3.2.1 *Wenn $f \in L^1(0, 2\pi)$ eine konvergente Fourierreihenentwicklung*

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx}$$

besitzt, dann gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (3.2)$$

Korollar 3.2.2 Die Fourierreihenentwicklung einer Funktion $f \in L^1(0, 2\pi)$ ist eindeutig.

Beweis. Nehme an, es gilt sowohl

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=-m}^m b_n e^{inx} \right\|_1 = 0$$

als auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx} \right\|_1 = 0,$$

mit für einem $k \in \mathbb{Z}$: $b_k \neq c_k$. Sei $\gamma = |b_k - c_k|$ und nehme $m_\gamma \geq |k|$ derart, dass

$$\left\| f - \sum_{n=-m_\gamma}^{m_\gamma} b_n e^{inx} \right\|_1 < \gamma \text{ und}$$

$$\left\| f - \sum_{n=-m_\gamma}^{m_\gamma} c_n e^{inx} \right\|_1 < \gamma.$$

Es folgt ein Widerspruch durch

$$\begin{aligned} 2\pi\gamma &= 2\pi |b_k - c_k| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \sum_{n=-m_\gamma}^{m_\gamma} (b_n - c_n) e^{inx} dx \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |e^{-ikx}| \left| \sum_{n=-m_\gamma}^{m_\gamma} (b_n - c_n) e^{inx} \right| dx \\ &= \left\| \sum_{n=-m_\gamma}^{m_\gamma} (b_n - c_n) e^{inx} \right\|_1 < 2\gamma. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung verwendete die Dreiecksungleichung. ■

Es wird nützlich sein, der obigen Partialsumme einen Namen zu geben:

Definition 3.2.3 Für $f \in L^1(0, 2\pi)$ definieren wir die **symmetrische m -te Ordnung Partialsumme** $S_m(f)$ durch

$$S_m(f)(x) := \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx}$$

mit c_n wie in (3.2)

Wir haben schon gesehen, dass man so eine Funktion f auch wie folgt schreiben kann:

$$f(x) = f_{0,e} + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m (f_{k,e} \cos(kx) + f_{k,o} \sin(kx)). \quad (3.3)$$

Korollar 3.2.4 Wenn $f \in L^1(0, 2\pi)$ eine Fourierreihenentwicklung hat, die man in (3.3) geschrieben hat, dann gilt auch

$$\begin{aligned} f_{0,e} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ f_{k,e} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \\ f_{k,o} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu beweisen, dass die meisten „netten“ Funktionen f eine konvergente Fourierreihenentwicklung haben.

Aufgabe 3.3 1. Berechnen Sie die Fourierreihenentwicklung von $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \text{sign}(x)$.

2. Berechnen Sie die Fouriersinusreihenentwicklung von $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1$.

3.3 Eigenschaften der Koeffizienten

Theorem 3.3.1 (Riemann-Lebesgue) Sei $f \in L^1(0, 2\pi)$ und setze

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx. \quad (3.4)$$

Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow -\infty} c_n = 0.$$

Beweis. Wir dürfen f periodisch fortsetzen auf $\mathbb{R}$ und finden

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in(x+\frac{\pi}{n})} f(x) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x - \frac{\pi}{n}) dx. \end{aligned}$$

Da findet man, dass

$$c_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} (f(x) - f(x - \frac{2\pi}{n})) dx.$$

Wenn f stetig ist, wird es einfach. Denn, weil stetige Funktionen auf kompakten Gebieten wie $[0, 2\pi]$ gleichmäßig stetig sind, folgt, wenn $n \rightarrow \infty$, dass

$$|c_n| \leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - f(x - \frac{2\pi}{n})| \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Wenn f nicht stetig ist, dann können wir approximieren. Sei $\varepsilon > 0$. Wenn $f \in L^1(0, 2\pi)$, dann kann man eine stetige,

2π -periodische Funktion f_s finden mit $\|f - f_s\|_1 < \varepsilon$. Seien $c_{n,s}$ die Fourier-Koeffizienten von f_s . Es gilt

$$\begin{aligned} |c_n - c_{n,s}| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} (f(x) - f_s(x)) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{-inx} (f(x) - f_s(x))| dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \|f - f_s\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon. \end{aligned}$$

Für f_s finden Sie wegen (3.5) einen n_ε derart, dass für $|n| \geq n_s$ gilt $|c_{n,s}| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ und insgesamt haben wir dann, dass für $|n| \geq n_s$ gilt:

$$|c_n| \leq |c_n - c_{n,s}| + |c_{n,s}| < \frac{1}{2\pi}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Das ist genau, was zu beweisen wäre. ■

Obwohl diese Koeffizienten c_n nach 0 gehen bei $L^1(0, 2\pi)$ -Funktionen, heißt das noch nicht, dass $S_m(f)$ konvergiert.

Korollar 3.3.2 Für $f \in L^1(0, b)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \sin(nx) f(x) dx = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \cos(nx) f(x) dx = 0.$$

Beweis. Sei $b < 2\pi k$ für $k \in \mathbb{N}$ und setze

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [0, b], \\ 0 & \text{für } x \in (b, 2\pi k). \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_0^b \sin(nx) f(x) dx = \sum_{m=0}^{k-1} \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \tilde{f}(x + 2m\pi) dx.$$

Auf die einzelnen Integrale in der Summe können wir das Theorem von Riemann-Lebesgue anwenden. Das Gleiche folgt mit $\cos(nx)$. ■

3.4 Der Dirichlet-Kern

Mit Hilfe dieses Kerns werden wir eine punktweise Konvergenz zeigen können.

Definition 3.4.1 Man nennt die Familie von Funktionen $\{D_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$D_m(x) = \sum_{n=-m}^m e^{inx}, \quad (3.6)$$

den **Dirichlet-Kern**.

Skizzen einiger D_m auf $[-\pi, \pi]$ findet man in Abbildung 3.1.

Den Dirichlet-Kern kann man auch ohne Summe schreiben und dann sieht man auch, dass jedes D_m eine reelle Funktion ist. Es gilt für $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} D_m(x) &= e^{-imx} \sum_{n=0}^{2m} e^{inx} = e^{-imx} \frac{1 - e^{i(2m+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-imx} - e^{i(m+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i(m+1/2)x} - e^{i(m+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\ &= \frac{\sin((m+1/2)x)}{\sin(x/2)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für $x = 0$ findet man

$$D_m(0) = \sum_{n=0}^{2m} 1 = 2m + 1.$$

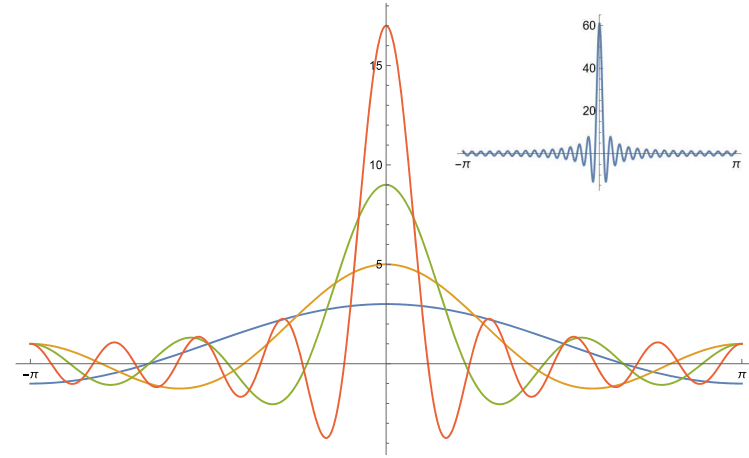


Abbildung 3.1: Der Dirichlet-Kern: D_1 (blau), D_4 (grün), D_9 (orange) und rechts oben D_{30}

Lemma 3.4.2 Der Dirichlet-Kern erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x) dx = 2\pi$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und dies.

2. $|D_m(x)| \leq \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\delta)}$ für $|x| \in [\delta, \pi]$ mit $\delta > 0$.

3. Für alle $a, b \in [0, \pi]$ oder $a, b \in [-\pi, 0]$ gilt

$$\left| \int_a^b D_m(x) dx \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{m+1/2}} D_m(x) dx \leq 2\pi.$$

4. Es gibt $c > 0$ derart, dass für $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_m(x)| dx \geq c \ln(m+1).$$

Bemerkung 3.4.3 Diese letzte Eigenschaft sorgt dafür, dass man bei Abschätzungen viel verlieren kann, wenn man den Betragstrich in dem Integral zieht:

$$\left| \int_a^b D_m(x) f(x) dx \right| \leq \int_a^b |D_m(x) f(x)| dx.$$

Man vergleiche mit der dritten Eigenschaft.

Beweis. Die erste Behauptung folgt direkt aus der Integration der rechten Seite in (3.6).

Die zweite Behauptung folgt direkt aus (3.7), weil $\sin(\frac{1}{2}\delta) \leq |\sin(\frac{1}{2}x)|$ für $\delta \leq |x| \leq \pi$.

Weil $x \mapsto \sin(x/2)$ auf $[0, \pi]$ von 0 nach 1 wächst, sind die Flächeninhalte zwischen aufeinanderfolgenden Nullstellen von D_m fallend. Das heißt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{m+1/2}} D_m(x) dx > \int_{\frac{\pi}{m+1/2}}^{\frac{2\pi}{m+1/2}} |D_m(x)| dx > \int_{\frac{2\pi}{m+1/2}}^{\frac{3\pi}{m+1/2}} D_m(x) dx > \dots$$

und für $a, b \in [0, \pi]$ folgt, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b D_m(x) dx \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{m+1/2}} D_m(x) dx = \\ &\int_0^{\frac{\pi}{m+1/2}} \frac{\sin((m+1/2)x)}{\sin(x/2)} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{m+1/2}} \frac{(m+1/2)x}{x/2} dx = 2\pi, \end{aligned}$$

und weil $D_m(x) = D_m(-x)$, folgt es auch für $a, b \in [-\pi, 0]$.

Für $x \in [0, \pi]$ findet man

$$|D_m(x)| = \left| \frac{\sin((m+1/2)x)}{\sin(x/2)} \right| \geq \frac{|\sin((m+1/2)x)|}{x/2}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_m(x)| dx &\geq 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin((m+1/2)x)|}{x/2} dx \\ &\geq 4 \int_0^{m\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \geq 4 \sum_{n=0}^{m-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \\ &\geq 4 \sum_{n=0}^{m-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(n+1)\pi} dt = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi} \sin(t) dt \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{n+1} \geq \frac{8}{\pi} \int_1^{m+1} \frac{1}{s} ds = \frac{8}{\pi} \ln(m+1). \end{aligned}$$

■

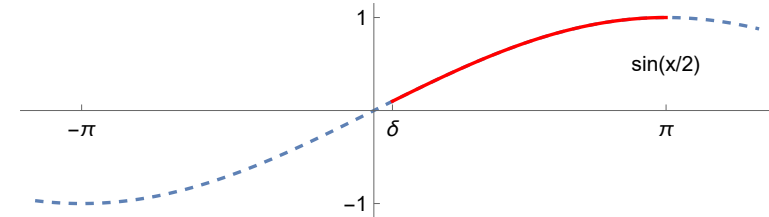


Abbildung 3.2: $x \mapsto \sin(\frac{1}{2}x)$

Lemma 3.4.4 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, periodische Funktion mit Periode 2π , die differenzierbar ist in 0.

Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x) f(x) dx = f(0).$$

Beweis. Weil $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x) dx = 2\pi$, reicht es, um Folgendes zu zeigen:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x) (f(x) - f(0)) dx = 0. \quad (3.8)$$

Weil f stetig ist auf $[-\pi, \pi]$ und differenzierbar ist in 0, ist

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

eine stetige Funktion. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x) (f(x) - f(0)) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)x\right) \frac{x}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} g(x) dx. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin(x/2)} g(x) & \text{für } x \neq 0, \\ 2g(0) & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

ist stetig auf $[-\pi, \pi]$ und mit

$$\sin\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)x\right) = \sin(mx) \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos(mx)$$

und Korollar 3.3.2 folgt (3.8). ■

Definition 3.4.5 Sei $L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ die Menge der 2π -periodischen Funktionen f mit $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ in $L^1(-\pi, \pi)$.

Lemma 3.4.6 Für $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ folgt

$$S_m(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y) f(y) dy.$$

Beweis. Dies folgt direkt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-y)} f(y) dy \\ &= \sum_{n=-m}^m \frac{1}{2\pi} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y) dy = \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx} = S_m(f)(x). \end{aligned}$$

■

Als Folge von Lemma 3.4.4 finden wir, dass für differenzierbare Funktionen in $L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(f)(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y) f(y) dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(y) f(x-y) dy = f(x). \end{aligned}$$

Man kann das Ergebnis in Lemma 3.4.4 verallgemeinern und finden dann das folgende Kriterium für punktweise Konvergenz:

Theorem 3.4.7 (Kriterium von Dini⁴) Sei $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$. Wenn für irgendein $\delta > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ Folgendes gilt:

$$\int_{|t|<\delta} \left| \frac{f(x_0+t) - f(x)}{t} \right| dt < \infty, \quad (3.9)$$

dann findet man punktweise Konvergenz der Fourierreihenentwicklung in x_0 :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(f)(x_0) = f(x_0).$$

⁴Ulisse Dini, 1845-1918

Beweis. Aus (3.9) folgt, dass $|f(x_0)| < \infty$.

Durch die Periodizität folgt, dass auch

$$f : [x_0 - \pi, x_0 + \pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ in } L^1(x_0 - \pi, x_0 + \pi)$$

liegt und so kann man die Funktion um x verschieben. Wir nehmen an, dass $x_0 = 0$.

Wenn (3.9) gilt, dann ist die Funktion

$$g(t) := \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

in $L^1(-\pi, \pi)$, denn $g|_{(-\delta, \delta)} \in L^1(-\delta, \delta)$ wegen (3.9) und außerdem gilt $g|_{(-\pi, -\delta)} \in L^1(-\pi, -\delta)$ als auch $g|_{(\delta, \pi)} \in L^1(\delta, \pi)$. Das Letzte wegen $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ in $L^1(-\pi, \pi)$ und

$$\frac{1}{|t|} \leq \frac{1}{\delta} < \infty \text{ für } t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi].$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} |S_m(f)(0) - f(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(y) (f(y) - f(0)) dy \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left((n + \frac{1}{2})y\right) \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)} g(y) dy \right|. \end{aligned}$$

Weil

$$\left| \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)} \right| \leq \pi \text{ für } y \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\},$$

liegt auch die Funktion

$$h(y) := \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)} g(y)$$

in $L^1(-\pi, \pi)$. Es folgt aus Korollar 3.3.2 und

$$\sin\left((n + \frac{1}{2})y\right) = \sin(ny) \cos\left(\frac{1}{2}y\right) + \cos(ny) \sin\left(\frac{1}{2}y\right),$$

dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left((n + \frac{1}{2})y\right) h(y) dy = 0.$$

Das gibt uns $\lim_{m \rightarrow \infty} |S_m(f)(0) - f(0)| = 0$. ■

3.5 Ein Kriterium bei Unstetigkeit

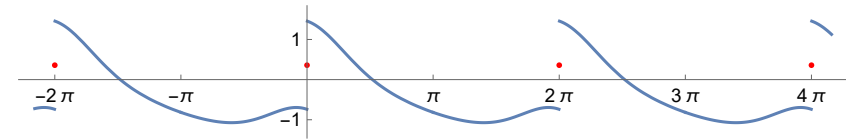


Abbildung 3.3: Periodische Funktion mit Sprung

Bevor wir das nächste Kriterium beweisen können, braucht es einige Lemmas aus der Analysis.

Lemma 3.5.1 (Erster Mittelwertsatz für Integrale) Sei $\varphi \in C[a, b]$ und sei $g \in L^1(a, b)$ eine nicht-negative Funktion. Dann gibt es mindestens ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b g(x) \varphi(x) dx = \varphi(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (3.10)$$

Beweis. Weil g nicht negativ ist gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) \varphi(x) dx &\geq \min_{t \in [a, b]} \varphi(t) \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b g(x) \varphi(x) dx &\leq \max_{t \in [a, b]} \varphi(t) \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Dann gibt es $\ell \in [\min_{t \in [a,b]} \varphi(t), \max_{t \in [a,b]} \varphi(t)]$ mit

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = \ell \int_a^b g(x)dx.$$

Sei $t_1, t_2 \in [a, b]$ derart, dass

$$\min_{t \in [a,b]} \varphi(t) = \varphi(t_1), \quad \max_{t \in [a,b]} \varphi(t) = \varphi(t_2).$$

Weil φ stetig ist, gibt es ξ zwischen t_1 und t_2 derart, dass $\varphi(\xi) = \ell$ und damit ist (3.10) erfüllt. ■

Lemma 3.5.2 (Zweiter Mittelwertsatz für Integrale)

Sei $a < b$, sei $g \in L^\infty(a, b)$ eine wachsende Funktion und sei $\varphi \in C[a, b]$. Dann existiert

$$g_a := \lim_{t \downarrow a} g(t) \text{ und } g_b := \lim_{t \uparrow b} g(t)$$

und es gibt mindestens ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = g_a \int_a^\xi \varphi(x)dx + g_b \int_\xi^b \varphi(x)dx. \quad (3.11)$$

Beweis. Jede monotone beschränkte Folge hat einen Grenzwert. Damit zeigt man, dass für jede wachsende Funktion $g \in L^\infty(a, b)$ die Grenzwerte

$$g_a := \lim_{t \downarrow a} g(t) \text{ und } g_b := \lim_{t \uparrow b} g(t) \quad (3.12)$$

existieren. Ohne sonstiges Wissen kann man jedoch nur zeigen, dass

$$g(a) \leq g_a \text{ und } g_b \leq g(b).$$

Wir ändern g durch

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x < b, \\ g_b & \text{für } x \geq b, \end{cases}$$

schreiben wieder g , und erweitern auch φ durch $\varphi(b)$ für $x > b$. Das neue g ist wiederum wachsend und das neue φ ist stetig. Außerdem definieren Φ als eine Stammfunktion von φ :

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt. \quad (3.13)$$

Sei $h > 0$. Wegen (3.12) gilt einerseits⁵, dass

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{g(x+h)\Phi(x+h) - g(x)\Phi(x)}{h} dx \\ &= \frac{1}{h} \int_b^{b+h} g(x)\Phi(x)dx - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} g(x)\Phi(x)dx \\ &= g_b\Phi(b) - g_a\Phi(a) + \mathcal{O}_{h \downarrow 0}(1) \\ &= g_b\Phi(b) + \mathcal{O}_{h \downarrow 0}(1), \end{aligned} \quad (3.14)$$

aber auch

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{g(x+h)\Phi(x+h) - g(x)\Phi(x)}{h} dx \\ &= \int_a^b g(x+h) \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} dx + \\ & \quad \int_a^b \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Phi(x) dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

⁵Die **Ordnungssymbole von Landau** (Edmund Landau, 1877-1938):

Groß O. $f(h) = \mathcal{O}_{h \rightarrow 0}(h^n)$ heißt:

$$\exists \varepsilon, M > 0, \forall h \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < |h| \leq \varepsilon : |h^{-n}f(h)| \leq M;$$

Klein O. $f(h) = \mathcal{O}_{h \rightarrow 0}(h^n)$ heißt: $\lim_{h \rightarrow 0} |h^{-n}f(h)| = 0$.

Betrachten wir beide Integrale in (3.15) getrennt. Weil φ stetig ist, ist Φ differenzierbar, und folgt

$$\begin{aligned} & \int_a^b g(x+h) \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} dx \\ &= \int_a^b g(x+h) (\varphi(x+h) + \mathcal{O}_{h \downarrow 0}(h)) dx \\ &= \int_a^b g(x) \varphi(x) dx + \mathcal{O}_{h \downarrow 0}(h). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Weil $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \geq 0$ können wir das vorige Lemma anwenden und finden $\xi_h \in [a, b]$ mit

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Phi(x) dx \\ &= \Phi(\xi_h) \int_a^b \frac{g(x+h) - g(x)}{h} dx \\ &= \Phi(\xi_h) \left(\frac{1}{h} \int_b^{b+h} g(x) dx - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} g(x) dx \right) \\ &= \Phi(\xi_h) (g_b - g_a) + \mathcal{O}_{h \downarrow 0}(1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aus (3.14) = (3.15) = (3.16) + (3.17) folgt

$$g_b \Phi(b) + \mathcal{O}_{h \downarrow 0}(1) = \int_a^b g(x) \varphi(x) dx + \Phi(\xi_h) (g_b - g_a) + \mathcal{O}_{h \downarrow 0}(1). \quad (3.18)$$

Wenn $g_b = g_a$, dann ist g konstant,

$$\int_a^b g(x) \varphi(x) dx = g_b \int_a^b \varphi(x) dx$$

und (3.11) gilt sogar für alle $\xi \in [a, b]$.

Wenn $g_b > g_a$ dann impliziert (3.18), dass der folgende Grenzwert existiert:

$$\ell := \lim_{h \downarrow 0} \Phi(\xi_h) = \frac{g_b \Phi(b) - \int_a^b g(x) \varphi(x) dx}{g_b - g_a}$$

und

$$\ell \in \overline{\Phi([a, b])} = \Phi([a, b]).$$

Diese letzte Gleichung gilt, weil Φ stetig ist. Also existiert $\xi \in [a, b]$ mit $\ell = \Phi(\xi)$ und aus (3.18) folgt

$$g_b \Phi(b) = \int_a^b g(x) \varphi(x) dx + \Phi(\xi) (g_b - g_a)$$

und mit (3.13) ist das identisch zu (3.11). ■

Aufgabe 3.4 Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in L^\infty(a, b)$ eine wachsende Funktion. Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \begin{cases} f(a) & \text{für } x = a, \\ \sup \{f(t); t \in [a, x)\} & \text{für } x > a. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass g auch eine wachsende Funktion ist mit $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.
2. Geben Sie ein Beispiel mit $g(x) \neq f(x)$.
3. Zeigen Sie, dass es kein $\varepsilon > 0$ und $[a_1, b_1]$ gibt mit $a_1 < b_1$ und $f(x) - g(x) > \varepsilon$ auf $[a_1, b_1]$.

Theorem 3.5.3 (Kriterium von Jordan⁶) Sei $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ die Differenz zweier monotonen Funktionen $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(f)(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)}{2}.$$

Beweis. Wir dürfen wieder annehmen, dass $x = 0$. Die periodische Funktion f kann nur die Differenz zweier wachsenden Funktionen (oder zweier fallenden Funktionen) sein. Nennen wir diese wachsenden Funktionen g und h :

$$f(y) = g(y) - h(y).$$

Für eine wachsende Funktion g existiert

$$g_\ell = \lim_{t \uparrow 0} g(t) \text{ und } g_r = \lim_{t \downarrow 0} g(t)$$

und

$$g_\ell \leq g(x) \leq g_r.$$

Weil g (und auch h) beschränkt ist auf $[-\pi, \pi]$, ist f sogar in $L^\infty(\mathbb{R})$. Wir werden zeigen, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(g)(0) = \frac{g_\ell + g_r}{2}.$$

Dann wird das ähnliche Ergebnis auch für h gelten und, weil $S_m(f) = S_m(g) - S_m(h)$, auch für f . Weil

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_m(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_m(y) dy = \frac{1}{2},$$

⁶Camille Jordan, 1838-1922

gilt

$$S_m(g) - \frac{g_\ell + g_r}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 D_m(y) (g(y) - g_\ell) dy + \int_0^\pi D_m(y) (g(y) - g_r) dy \right). \quad (3.19)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Weil

$$\lim_{y \downarrow 0} g(y) = g_r$$

können wir $\delta_\varepsilon > 0$ so wählen, dass $g_r \leq g(y) \leq g_r + \varepsilon$ für $y \in (0, \delta_\varepsilon]$. Betrachten wir das letzte Integral in (3.19) und teilen es wie folgt auf:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi D_m(y) (g(y) - g_r) dy &= \\ \int_0^{\delta_\varepsilon} D_m(y) (g(y) - g_r) dy &+ \int_{\delta_\varepsilon}^\pi D_m(y) (g(y) - g_r) dy. \end{aligned}$$

Weil D_m stetig ist und g wachsend, können wir Lemma 3.5.2 verwenden und finden $\xi_m \in [0, \delta_\varepsilon]$ mit

$$\int_0^{\delta_\varepsilon} D_m(y) (g(y) - g_r) dy = (g(\delta_\varepsilon) - g_r) \int_{\xi_m}^{\delta_\varepsilon} D_m(y) dy. \quad (3.20)$$

Aus (3.20) folgt mit Lemma 3.4.2-3:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\delta_\varepsilon} D_m(y) (g(y) - g_r) dy \right| &\leq (g(\delta_\varepsilon) - g_r) \left| \int_{\xi_m}^{\delta_\varepsilon} D_m(y) dy \right| \\ &\leq (g(\delta_\varepsilon) - g_r) 2\pi \leq 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

Korollar 3.3.2 impliziert, dass man m_ε so groß wählen kann, dass für alle $m > m_\varepsilon$ gilt

$$\left| \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} D_m(y) (g(y) - g_r) dy \right| < \varepsilon.$$

Für $m > m_\varepsilon$ folgt

$$\left| \int_0^{\pi} D_m(y) (g(y) - g_r) dy \right| < (2\pi + 1) \varepsilon$$

und weil dies für jedes $\varepsilon > 0$ möglich ist, gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_m(y) (g(y) - g_r) dy = 0.$$

Ähnlich folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_m(y) (g(y) - g_\ell) dy = 0$$

und mit (3.19) das gewünschte Ergebnis:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| S_m(g) - \frac{g_\ell + g_r}{2} \right| = 0.$$

■

Aufgabe 3.5 Wir schauen nochmals, wie in Aufgabe 3.3, die Approximation von $\text{sign}(x)$ mit $S_n(\text{sign})(x)$ an.

1. Begründen Sie, dass

$$S_n(\text{sign})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)(x-y))}{\sin((x-y)/2)} \text{sign}(y) dy.$$

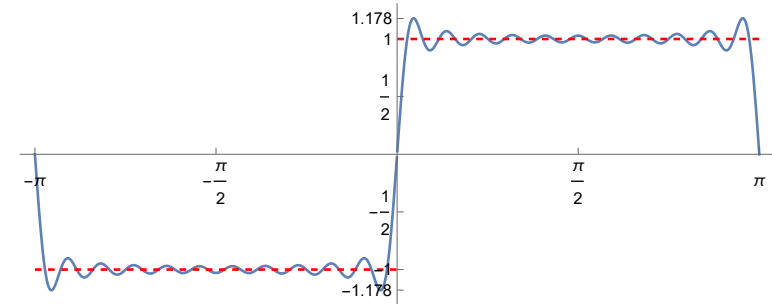


Abbildung 3.4: $S_n(\text{sign})(x)$ für $n = 21$ und $\text{sign}(x)$

2. Zeigen Sie, dass

$$S_n(\text{sign})(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-x}^x \frac{\sin((n+1/2)y)}{\sin(y/2)} dy - \int_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\sin((n+1/2)y)}{\sin(y/2)} dy \right).$$

Man kann damit zeigen, dass $S_n(\text{sign})(x)$ sein Maximum nahe bei $\frac{\pi}{n+1/2}$ hat. Abbildung 3.5 kann dabei helfen.

3. Zeigen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{-\pi}{n+1/2}}^{\frac{\pi}{n+1/2}} \frac{\sin((n+1/2)y)}{\sin(y/2)} dy = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi - \frac{\pi}{n+1/2}}^{\pi + \frac{\pi}{n+1/2}} \frac{\sin((n+1/2)y)}{\sin(y/2)} dy = 0.$$

Mit dieser Aufgabe haben wir gefunden, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{x \in [-\pi, \pi]} S_m(\text{sign})(x) =$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(\text{sign})\left(\frac{\pi}{m+1/2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Weil $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \approx 1.178979744$, gilt für jede Approximation $S_m(\text{sign})$ mit m groß, dass

$$\max_{|x| \leq \pi} S_m(\text{sign})(x) - \min_{|x| \leq \pi} S_m(\text{sign})(x) \geq$$

$$1.178 \left(\max_{|x| \leq \pi} \text{sign}(x) - \min_{|x| \leq \pi} \text{sign}(x) \right).$$

Dieses Phänomen nennt man den Gibbs⁷-Effekt und passiert bei jeder Funktion mit einem „Sprung“.

Weil jpg-Dateien auch auf Fourier-Approximation basieren, sah man in Zeiten von Slow-Internet beim Aufbau eines Fotos bei scharfen Übergängen auch solche „Farbzitterungen bei Sprüngen“. Siehe Abbildung 3.6.

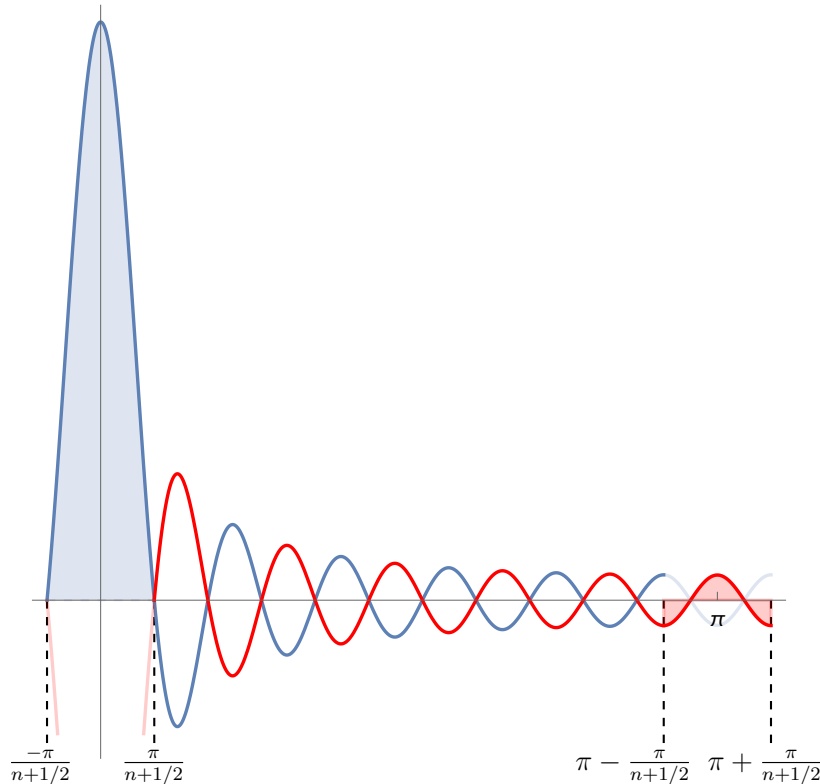


Abbildung 3.5: Skizzen von $\frac{1}{2\pi} D_n(x)$ in Blau und $-\frac{1}{2\pi} D_n(x)$ in Rot. $S_n(\text{sign})\left(\frac{\pi}{n+1/2}\right)$ ist dann die Summe beider Integrale, dargestellt durch die gefärbten Flächen. Der blaue Teil ist der Hauptteil; der rote Teil geht nach 0 für $n \rightarrow \infty$.



Abbildung 3.6: Gibbs und Gibbs mit 2d-Gibbs-Effekt

⁷Josiah Willard Gibbs, 1839-1903

Fourieranalysis

Alternative Approximationen



Kapitel 4

4.1 Gute Kerne

Die Fourierreihenentwicklung wurde definiert durch

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m f_n e^{inx} \text{ mit } f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx.$$

Gleichzeitig wurden auch $\{S_m(f)\}_{m \in \mathbb{N}}$ als Folge von approximierenden Funktionen betrachtet. Vielleicht gibt es jedoch $g_m \in \text{Span}[\{e^{inx}\}_{n=-m}^m]$, die es besser macht. Auf den ersten Blick scheint dies unwahrscheinlich, ist jedoch wieder eine Frage, die davon abhängt, welche Konvergenz betrachtet wird.

In Abbildung 4.1 findet man links die Standard Approximation $x \mapsto S_m(\text{sign})(x)$ für $x \mapsto \text{sign}(x)$. Für jede Funktion f gilt $S_m(f) \in \text{Span}[\{e^{inx}\}_{n=-m}^m]$. Rechts steht in Rot eine andere Approximation $g_m \in \text{Span}[\{e^{inx}\}_{n=-m}^m]$, die auch $x \mapsto \text{sign}(x)$ approximiert und besser aussieht. Oder?

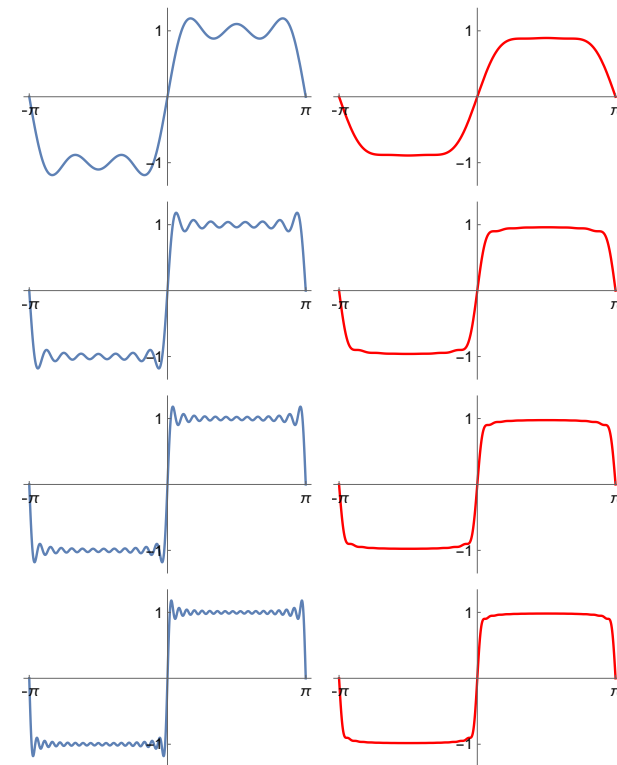


Abbildung 4.1: Approximationen von der Funktion $x \mapsto \text{sign}(x)$ in $\text{Span}[\{e^{inx}\}_{n=-m}^m]$ für $m = 5, 15, 25, 35$

Wir werden alternative Möglichkeiten für den Dirichlet-Kern beschreiben. Das Problem bei dem Dirichlet-Kern ist die vierte Eigenschaft in Lemma 3.4.2. Weil

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_m(x)| dx \rightarrow \infty \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

kann die Approximation $S_m(f)$ einer Funktion f divergieren. In 1873 hat Paul du Bois-Reymond¹ sogar eine stetige Funktion beschrieben, bei der die Fourierreihenentwicklung tatsächlich nicht überall konvergiert.

Dieses Problem wird gelöst, wenn man gute Kerne betrachtet.

Definition 4.1.1 Man nennt die Familie von Funktionen

$$\{K_m \in L^1(-\pi, \pi)\}_{m \in \mathbb{N}}$$

einen **guten Kern**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(x) dx = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$;
2. Es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ mit $\int_{-\pi}^{\pi} |K_m(x)| dx \leq M$ für alle $m \in \mathbb{N}$;
3. Für alle $\delta > 0$ gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < \pi} |K_m(x)| dx = 0$.

¹P. du Bois-Reymond, Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern, Journal für die reine und angewandte Mathematik 76 (1873), 61-91.

Aufgabe 4.1 Zeigen Sie, dass

$$K_m(x) = 2\pi \max(m - m^2|x|, 0)$$

ein guter Kern ist.

Aufgabe 4.2 Sei $f \in C[-\pi, \pi]$. Zeigen Sie für jedes $x \in (-\pi, \pi)$, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(x-y) f(y) dy = f(x).$$

Gilt dies auch für $|x| = \pi$?

Eine Fourierreihenentwicklung mit $\mathcal{B}_F$ beschäftigt sich mit 2π -periodischen Funktionen. Für Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die periodisch sind mit Periode 2π , gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tilde{y}) g(x-\tilde{y}) d\tilde{y} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy. \end{aligned}$$

So hat man für solche f auch

$$\begin{aligned} S_m(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(x-y) f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_m(y) f(x-y) dy. \end{aligned}$$

Diese Umschreibungen lassen das nächste Theorem mit dem Kriterium von Dini in Theorem 3.4.7 vergleichen.

Theorem 4.1.2 Sei $f \in C(\mathbb{R})$ periodisch mit Periode 2π und sei $\{K_m \in L^1(-\pi, \pi)\}_{m \in \mathbb{N}}$ ein guter Kern. Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(y) f(\cdot - y) dy - f(\cdot) \right\|_{\infty} = 0.$$

Beweis. Mit der ersten Eigenschaft eines guten Kerns folgt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(y) f(x - y) dy - f(x) \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_m(y) (f(x - y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_m(y)| |f(x - y) - f(x)| dy. \end{aligned}$$

Dieses letzte Integral teilen wir auf in $|y| < \delta$ und $\delta \leq |y| \leq \pi$. Weil f stetig und periodisch ist, ist f sogar gleichmäßig stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |y| < \delta \implies |f(x - y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Es folgt mit der zweiten Eigenschaft eines guten Kerns, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_m(y)| |f(x - y) - f(x)| dy \leq \frac{M}{2\pi} \varepsilon.$$

Mit der dritten Eigenschaft und

$$|f(x - y) - f(x)| \leq 2 \|f\|_{\infty}$$

finden wir für $m \rightarrow \infty$, dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |y| < \pi} |K_m(y)| |f(x - y) - f(x)| dy \leq \\ & \frac{1}{\pi} \|f\|_{\infty} \int_{\delta < |y| < \pi} |K_m(y)| dy \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Weil diese Abschätzungen unabhängig sind von x , folgt die Behauptung. ■

4.2 Cesàro summierbar

Eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nennt man summierbar, wenn $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für

$$s_m := \sum_{n=0}^m a_n, \quad (4.1)$$

konvergiert. Für jede summierbare Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gilt notwendigerweise, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Notwendig, denn

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Es ist keine ausreichende Bedingung, weil die harmonische Reihe einen Widerspruch liefert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ und } \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{n} = \infty.$$

Definition 4.2.1 Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit s_m in (4.1) definiert. Die **Cesàro²-Summe** σ der Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ wird dann definiert durch

$$\sigma_m := \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m s_n, \quad (4.2)$$

wenn $\sigma := \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m \in \mathbb{C}$ existiert.

Wir vergleichen mal s_n mit σ_n :

$n :$	0	1	2	3	4
$s_n :$	a_0	$a_0 + a_1$	$a_0 + a_1 + a_2$	$a_0 + a_1 + a_2 + a_3$	$\dots$
$\sigma_n :$	a_0	$a_0 + \frac{1}{2}a_1$	$a_0 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2$	$a_0 + \frac{3}{4}a_1 + \frac{2}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3$	$\dots$

²Ernesto Cesàro, 1859-1906

Man kann σ_m also auch wie folgt direkt mit a_n schreiben:

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^m \left(1 - \frac{n}{m+1}\right) a_n.$$

Es sieht so aus, dass wenn $s_n \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$ auch σ_n nach s konvergiert. Das schauen wir uns im nächsten Lemma mal genau an.

Lemma 4.2.2 Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und setze s_m und σ_m wie in Definition 4.2.1. Dann gilt Folgendes:

1. Wenn $s = \lim_{m \rightarrow \infty} s_n$ in $\mathbb{C}$ existiert, dann existiert auch $\sigma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_n$ und $\sigma = s$.
2. Wenn $\sigma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_n$ in $\mathbb{C}$ existiert, dann existiert nicht unbedingt $\lim_{m \rightarrow \infty} s_n$ in $\mathbb{C}$.

Beweis. 1. Wenn $s = \lim_{m \rightarrow \infty} s_n$ existiert, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass für $m > m_\varepsilon$:

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \right| = |s - s_m| < \varepsilon.$$

Dann gilt für $m > m_\varepsilon$, dass

$$\begin{aligned} |s - \sigma_m| &= \left| s - \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m s_n \right| \\ &= \left| \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m (s - s_n) \right| \\ &\leq \frac{1}{m+1} \sum_{n=m_\varepsilon}^m |s - s_n| + \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m_\varepsilon} |s - s_n| \\ &< \frac{m+1-m_\varepsilon}{m+1} \varepsilon + \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m_\varepsilon} |s - s_n| \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m_\varepsilon} |s - s_n|. \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist eine feste (von ε abhängige) Zahl und durch $m_\varepsilon^* > m_\varepsilon$ genügend groß zu wählen, findet man für $m > m_\varepsilon^*$

$$\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m_\varepsilon} |s - s_n| < \varepsilon,$$

und folgt, dass

$$m > m_\varepsilon^* \implies |s - \sigma_m| < 2\varepsilon.$$

2. Betrachte $a_n = (-1)^n$. ■

Aufgabe 4.3 Das Lemma sagt, dass Konvergenz von $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nicht aus Konvergenz von $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ folgt. Eine Ausnahme gilt, wenn $a_n \in [0, \infty)$. Beweisen Sie Folgendes:

3. Wenn $a_n \in [0, \infty)$ und $\sigma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_n$ existiert, dann gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} s_n = \sigma$.

Aufgabe 4.4 Man kann das Spiel in der Definition der Cesàro-Summe noch weiter treiben: Nennen wir eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen 3-Schritt-summierbar nach w , wenn $w = \lim_{m \rightarrow \infty} w_m \in \mathbb{C}$ existiert mit σ_m in (4.2) und

$$w_m := \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \sigma_n.$$

1. Zeigen Sie, dass wenn $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \sigma \in \mathbb{C}$ existiert, auch $\lim_{m \rightarrow \infty} w_m = \sigma$.
2. Geben Sie eine Beispielfolge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ an, die nicht Cesàro-summierbar ist, aber schon 3-Schritt-summierbar.

Definition 4.2.3 Die Cesàro-Summe für eine Approximation einer Funktion $f \in L^1(-\pi, \pi)$ mit $\text{Span}[\mathcal{B}_F]$ -Funktionen ist definiert durch

$$\sigma_m(f)(x) := \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m S_n(f)(x).$$

Der **Fejér³-Kern**, der dazugehört, ist definiert durch

$$F_m(x) := \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m D_n(x).$$

Auch hier zeigt man:

Lemma 4.2.4 Für $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ folgt

$$\sigma_m(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(x-y) f(y) dy.$$

In der rechten Spalte von Abbildung 3.5 ist die Cesàro-Summe der Fourier-Koeffizienten verwendet.

Auch diesen Fejér-Kern kann man ohne Summenzeichen schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m D_n(x) &= \sum_{n=0}^m \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \sum_{n=-m}^m (m+1-|n|) e^{inx} \\ &= m+1 + \sum_{n=1}^m (m+1-n) e^{-inx} + \sum_{n=1}^m (m+1-n) e^{inx} \end{aligned}$$

³Lipót Fejér, 1880-1959

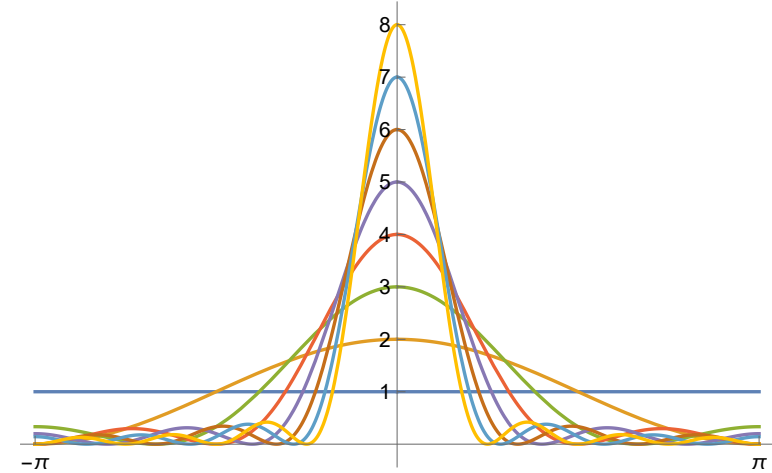


Abbildung 4.2: Skizzen der ersten 8 Fejér-Kerne F_0 bis F_7

$$\begin{aligned} &= m+1 + e^{-imx} \sum_{n=1}^m (m+1-n) e^{i(m-n)x} \\ &\quad + e^{imx} \sum_{n=1}^m (m+1-n) e^{-i(m-n)x} \\ &= m+1 + e^{-imx} \sum_{k=1}^m k e^{i(k-1)x} + e^{imx} \sum_{k=1}^m k e^{-i(k-1)x}. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k z^{k-1} &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{k=0}^m z^k = \frac{\partial}{\partial z} \frac{z^{m+1} - 1}{z - 1} \\ &= \frac{m z^{m+1} - (m+1) z^m + 1}{(z-1)^2}, \end{aligned}$$

folgt für $x \neq 0$, dass

$$\begin{aligned}
 (4.3) &= m + 1 + e^{-imx} \frac{me^{i(m+1)x} - (m+1)e^{imx} + 1}{(e^{ix} - 1)^2} \\
 &\quad + e^{imx} \frac{me^{-i(m+1)x} - (m+1)e^{-imx} + 1}{(e^{-ix} - 1)^2} \\
 &= (m + 1) \frac{e^{ix/2} - 2 + e^{-ix/2}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} + \frac{m - (m+1)e^{-ix} + e^{-i(m+1)x}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} \\
 &\quad + \frac{m - (m+1)e^{ix} + e^{i(m+1)x}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} \\
 &= \frac{e^{i(m+1)x} - 2 + e^{-i(m+1)x}}{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})^2} = \left(\frac{\sin((m+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Es folgt für $x \neq 0$, dass

$$F_m(x) = \frac{1}{m+1} \left(\frac{\sin((m+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2. \quad (4.4)$$

Man zeigt direkt, dass $F_m(0) = m+1$.

Einige Eigenschaften listen wir im Lemma:

Lemma 4.2.5 *Der Fejér-Kern erfüllt die folgenden Bedingungen:*

1. $F_m(x) \geq 0$ für $x \in [-\pi, \pi]$.
2. $\int_{-\pi}^{\pi} F_m(x) dx = 2\pi$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
3. $F_m(x) \leq \frac{\pi}{2 \sin(\frac{1}{2}\delta)}$ für $|x| \in [\delta, \pi]$ mit $\delta > 0$.
4. Für alle $\delta > 0$ gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x| < \pi} |F_m(x)| dx = 0$.

Beweis. 1. Dies folgt direkt aus (4.4).

2. Weil $\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x) dx = 2\pi$, folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_m(x) dx = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 2\pi.$$

3. Mit (4.4) findet man für $|x| \in [\delta, \pi]$ mit $\delta > 0$, dass

$$\begin{aligned}
 F_m(x) &\leq \left| \frac{\sin((m+1)x/2)}{(m+1)x/2} \right| \left| \frac{x/2}{\sin(x/2)} \right| \frac{1}{\sin(x/2)} \\
 &\leq 1 \frac{\pi}{2 \sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{2 \sin(\frac{1}{2}\delta)}.
 \end{aligned}$$

4. Wir haben

$$\begin{aligned}
 \int_{\delta < |x| < \pi} |F_m(x)| dx &= \frac{1}{m+1} \int_{\delta < |x| < \pi} \left(\frac{\sin((m+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 dx \\
 &\leq \frac{1}{m+1} \frac{2\pi}{(\sin(\frac{1}{2}\delta))^2}.
 \end{aligned}$$

■

Schreiben wir $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ für die stetigen, 2π -periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

Theorem 4.2.6 *Sei $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_m(x-y) f(y) dy = f(x)$$

gleichmäßig für $x \in [-\pi, \pi]$.

Beweis. Wegen Theorem 4.1.2 müssen wir nur bemerken, dass der Fejèr-Kern ein guter Kern ist. Das wurde in Lemma 4.2.5 gemacht. ■

Korollar 4.2.7 Sei $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Dann gibt es eine Folge $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \text{Span}[\mathcal{B}_F]$ mit

$$\|f - f_m\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Bemerkung 4.2.8 Der Funktionenraum $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ist ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_\infty$, definiert durch

$$\|u\|_\infty = \sup \{|u(x)|; x \in [-\pi, \pi]\}.$$

Das Korollar bedeutet: Die trigonometrischen Funktionen von $\text{Span}[\mathcal{B}_F]$ liegen dicht in $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Bemerkung 4.2.9 Für $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ konvergiert im Allgemeinen die Fourierreihe $S_m(f)$ nicht nach f , sondern die Cesàro-Summe $\sigma_m(f)$ der Fourierreihe. Konvergenz und Divergenz ist nur eine Sache von Good Kernel and Bad Kernel.

Aufgabe 4.5 Welche stetige Funktionen in $C[0, \pi]$ kann man mit $\text{Span}[\mathcal{B}_{FS}]$ in $\|\cdot\|$ -Norm approximieren?

4.3 Abel summierbar

Eine andere Idee, um die Konvergenz der Fourierreihe zu betrachten, geht zurück auf Fourier und seine Wärmeleitungsgleichung auf der Einheitsscheibe. Wenn auf dem Rand die Funktion als Fourierreihe

$$u_{\text{Rand}}(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n e^{in\varphi}$$

gegeben ist, dann wird die Lösung des Randwertproblems in Polarkoordinaten:

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n r^{|n|} e^{in\varphi}. \quad (4.5)$$

Weil für $u_{\text{Rand}} \in L^1(-\pi, \pi)$ gilt, dass

$$\begin{aligned} |u_n e^{in\varphi}| &= |u_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{\text{Rand}}(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u_{\text{Rand}}(\varphi)| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \|u_{\text{Rand}}\|_1 \end{aligned}$$

ist der Konvergenzradius von der Potenzreihe in (4.5) gleich 1. Also konvergiert die Reihe für u , wenn $|r| < 1$. Dann kann es Sinn machen

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n r^{|n|} e^{in\varphi}$$

zu betrachten.

Definition 4.3.1 Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Man nennt diese Folge **Abel-summierbar**, wenn der folgende Grenzwert in $\mathbb{C}$ existiert:

$$\omega := \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n. \quad (4.6)$$

Lemma 4.3.2 Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und setze σ_m wie in Definition 4.2.1. Dann gilt Folgendes:

1. Wenn $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cesàro-summierbar ist mit Summe $\sigma \in \mathbb{C}$, dann ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch Abel-summierbar mit gleicher Summe σ .

2. Es gibt Abel-summierbare Folgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, die nicht Cesàro-summierbar sind.

Beweis. Wir setzen wieder $s_m = \sum_{n=0}^m a_n$ und $(m+1)\sigma_m = \sum_{n=0}^m s_n$.

1. Cesàro-summierbar heißt $\sigma_n \rightarrow \sigma \in \mathbb{C}$. Wenn $\sigma_m \rightarrow \sigma$ für $m \rightarrow \infty$, folgt also für großes n , dass $|\sigma_n| \leq |\sigma| + 1$ und dann auch

$$|s_n| = |(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}| \leq (2n+1)(|\sigma| + 1),$$

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq 4n(|\sigma| + 1).$$

Dann haben sowohl

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n \text{ als auch } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n$$

einen Konvergenzradius größer gleich den von $\sum_{n=0}^{\infty} n r^n$, also mindestens 1. Außerdem gilt dann für $r \in [0, 1)$

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

und ebenso

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n.$$

Es folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n$$

und für Abel-summierbar können wir zeigen, dass

$$\lim_{r \uparrow 1} (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n = \sigma. \quad (4.7)$$

Man erinnere sich, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^n = \frac{d}{dr} \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{1-r} - 1 \right) = \frac{1}{(1-r)^2}. \quad (4.8)$$

Mit dieser Identität gilt

$$\left| (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n - \sigma \right| = \left| (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sigma_n - \sigma) r^n \right|. \quad (4.9)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wir spalten die letzte Summe in $n \leq n_\varepsilon$ und $n > n_\varepsilon$, mit n_ε derart, dass

$$n > n_\varepsilon \implies |\sigma_n - \sigma| < \varepsilon.$$

Aus (4.8) folgt, dass unabhängig von $r \in [0, 1)$ Folgendes gilt:

$$\left| (1-r)^2 \sum_{n > n_\varepsilon} (n+1)(\sigma_n - \sigma) r^n \right| \leq (1-r)^2 \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} (n+1) r^n \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Weil die restliche Summe nur endlich viele Terme hat,

$$\left| (1-r)^2 \sum_{n=0}^{n_\varepsilon} (n+1)(\sigma_n - \sigma) r^n \right| \leq (1-r)^2 \sum_{n=0}^{n_\varepsilon} (n+1) |\sigma_n - \sigma|,$$

geht dieser Teil nach 0 für $r \uparrow 1$. Das zeigt uns, dass wir (4.9) beliebig klein bekommen können und beweist so (4.7).

2. Schauen Sie die Folge an, definiert durch

$$a_n = (-1)^{n+1} n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Man berechnet

$$s_n = \begin{cases} -n/2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (n+1)/2 & \text{für } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Cesàro-Summe ist also nicht konvergent, während für $r \in (0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n r^n &= r \sum_{n=1}^{\infty} n (-r)^{n-1} = r \left(\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)_{z=-r} \\ &= r \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} \right)_{z=-r} = r \left(\frac{1}{(1-z)^2} \right)_{z=-r} = \frac{r}{(1+r)^2} \end{aligned}$$

und

$$\omega = \lim_{r \uparrow 1} \frac{r}{(1+r)^2} = \frac{1}{4}.$$

■

Aufgabe 4.6 Beweisen Sie, dass auch die 3-Schritt-Summierbarkeit aus Aufgabe 4.4 die Abel-Summierbarkeit impliziert.

Definition 4.3.3 Der **Poisson⁴-Kern** ist definiert als die Familie der folgenden r -abhängigen Funktionen:

$$P_r(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{inx} \text{ mit } r \in [0, 1].$$

⁴Siméon Denis Poisson, 1781-1840

Die **Abel-Approximationen** von $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ mit Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \text{ für } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

sind definiert durch

$$A_r(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{inx}.$$

Auch hier findet man analog zu Lemma 3.4.6 und Lemma 4.2.4, dass

$$A_r(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y) f(y) dy.$$

Lemma 4.3.4 Für $r \in [0, 1)$ gilt

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x) + r^2}.$$

Beweis. Man rechnet direkt:

$$\begin{aligned} P_r(x) &= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} ((re^{-ix})^n + (re^{ix})^n) \\ &= -1 + \frac{1}{1-re^{-ix}} + \frac{1}{1-re^{ix}} \\ &= \frac{1-r^2}{(1-re^{-ix})(1-re^{ix})} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x) + r^2}. \end{aligned}$$

■

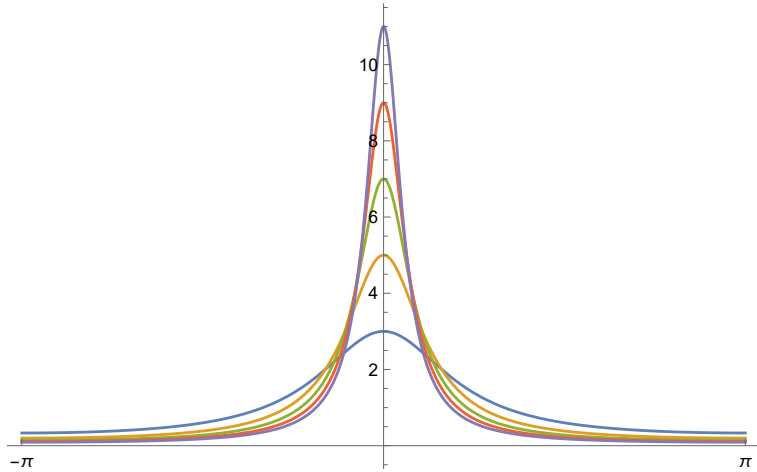


Abbildung 4.3: Skizzen für $r \in \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\}$ des Poisson-Kerns $P(r, x)$ und bemerke, dass $P(r, 0) = \frac{1+r}{1-r} \rightarrow \infty$, wenn $r \uparrow 1$

Proposition 4.3.5 Sei $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ und seien c_n die zugehörigen Fourier-Koeffizienten (4.10). Dann gilt

$$\left\| f - \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{inx} \right\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ für } r \uparrow 1. \quad (4.11)$$

Aufgabe 4.7 1. Aus (4.11) folgt nicht direkt, dass die trigonometrischen Funktionen von $\text{Span}[\mathcal{B}_F]$ dicht liegen in $(C_{2\pi}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$. Wieso nicht?

2. Kann man dies mit (4.11) trotzdem noch zeigen, wenn man mit

$$f_{r,m}(x) := \sum_{n=-m}^m c_n r^{|n|} e^{inx}$$

vergleicht für geschickte m und r ? Wie soll man da m und r wählen?

3. Begründen Sie, dass es stetige Funktionen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ gibt mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{r \uparrow 1} f_{r,m}(0) \neq \lim_{r \uparrow 1} \lim_{m \rightarrow \infty} f_{r,m}(0).$$



Dieser Abschnitt zeigt das Beispiel einer stetigen Funktion, bei der die Fourierreihenentwicklung nicht überall konvergiert. Wir folgen dem Ansatz in [10, Chapter 3, section 2.2].

5.1 Vorbereitung

In Beispiel 1.2 und auch Beispiel 1.3 haben wir

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{\sin(nx)}{n}$$

betrachtet. Die Reihe konvergiert und die dadurch definierte Funktion f ist 2π -periodisch mit Sprung in 0. Weil

$$\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{inx}}{n} + \frac{e^{-inx}}{-n} \right),$$

könnte man die Reihe vielleicht formal auch schreiben als

$$\frac{1}{2i} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{inx}}{n}.$$

Man soll hier

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{e^{inx}}{n} \quad \text{und} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{e^{-inx}}{n}$$

getrennt betrachten und beide Reihen divergieren für $x = 0$:

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \geq \int_1^m \frac{1}{x} dx = \ln(m) \rightarrow \infty \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Für $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ kann man die Reihe umschreiben zu

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{e^{\pm inx}}{n} = -\text{Log}(1 - e^{\pm ix})$$

und sieht auch da das Problem, wenn $x \rightarrow 0$.

Die Idee, eine stetige Funktion f mit divergenter Fourierreihe $\{S_m(f)\}$ zu konstruieren, basiert auf einem Balancieren zwischen dem symmetrischen Aufbau der Termen in $S_m(f)$ und einer geschickten Wahl von Funktionen aus $\text{Span}[\mathcal{B}_F]$, die sich summieren lassen zu einer stetigen Funktion.

Abschnitt 4 hat gezeigt, dass es eine Hierarchie gibt bezüglich der Summierbarkeit. Die Gegenbeispiele, dass Abel-summierbar nicht Cesàro, und Cesàro nicht normal-summierbar impliziert, hatten alternierende Termen. Hat man keine alternierende Termen, dann ist der Unterschied klein. Es folgt ein Lemma, das wir beim Gegenbeispiel brauchen werden.

Lemma 5.1.1 Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ derart, dass $|a_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Sei $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r^n$ konvergent für $r \in (0, 1)$. Wenn $|\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r^n|$ für $r \in [0, 1)$ beschränkt ist, dann ist auch $|\sum_{n=0}^m a_n|$ für $m \in \mathbb{N}$ beschränkt.

Beweis. Wir setzen für $m \in \mathbb{N}$ und $r \in [0, 1)$

$$s_m = \sum_{n=0}^m a_n \text{ und } A_r = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n r^n.$$

Weil wir $|a_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ angenommen haben, existiert

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} n |a_n|.$$

Dann findet man

$$\begin{aligned} |s_m - A_r| &= \left| \sum_{n=0}^m a_n (1 - r^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n r^n \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^m \frac{M}{n} (1 - r^n) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{M}{n} r^n \\ &\leq \sum_{n=1}^m M (1 - r) \frac{1 + r + \dots + r^{n-1}}{n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{M}{m+1} r^n \\ &\leq m M (1 - r) + \frac{M}{m+1} \frac{1}{1-r}. \end{aligned}$$

Für $r = 1 - \frac{1}{m+1}$ folgt $r \in [0, 1)$ und

$$|s_m - A_r| \leq 2M.$$

Weil A_r für $r \in [0, 1)$ beschränkt ist, ist auch s_m für $m \in \mathbb{N}^+$ beschränkt. ■

Beispiel 5.1 Die Funktion $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2} (\pi - x)$$

kann man 2π periodisch fortsetzen. Sie hat die Fourierkoeffizienten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \frac{1}{2} (\pi - x) dx = \frac{1}{2in}. \quad (5.1)$$

Siehe Beispiel 1.2. Weil der Poisson-Kern ein guter Kern ist und weil f eine beschränkte Funktion ist, sind auch die Funktionen $A_r f$ gleichmäßig beschränkt. Weil $P_r(x) \geq 0$ gilt, folgt sogar

$$\begin{aligned} |A_r f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y) f(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y) |f(y)| dy \\ &\leq \|f\|_{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) dy = \|f\|_{\infty} \end{aligned}$$

und $\|A_r f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$. Weil (5.1) gilt, kann man das letzte Lemma anwenden, und findet, dass auch

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|s_m f\|_{\infty} < \infty.$$

□

5.2 Die Bausteine

Stein und Shakarchi setzen

$$f_m(x) = \sum_{0 < |n| \leq m} \frac{e^{inx}}{n} \text{ und } \tilde{f}_m(x) = \sum_{-m \leq n < 0} \frac{e^{inx}}{n}.$$

Dann definieren sie trigonometrische Funktionen

$$P_m(x) := e^{2imx} f_m(x) \text{ und } \tilde{P}_m(x) := e^{2imx} \tilde{f}_m(x).$$

Diese Funktionen enthalten nicht-triviale e^{inx} -Termen

$$\begin{aligned} \text{bei } P_m, \text{ wenn } n \in \{m, \dots, 3m\} \setminus \{2m\}, \\ \text{bei } \tilde{P}_m, \text{ wenn } n \in \{m, \dots, 2m-1\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Lässt man den Dirichlet-Kern arbeiten auf P_m , so findet man

$$S_k(P_m)(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq m, \\ \dots & \text{für } m < k < 2m, \\ \tilde{P}_m & \text{für } k = 2m, \\ \dots & \text{für } 2m < k < 3m, \\ P_m & \text{für } k \geq 3m. \end{cases} \quad (5.3)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |P_m(x)| &= |e^{2imx} f_m(x)| = |f_m(x)|, \\ |\tilde{P}_m(x)| &= |e^{2imx} \tilde{f}_m(x)| = |\tilde{f}_m(x)|. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Punktweise findet man zwar

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f_\infty(x)$$

für

$$f_\infty(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{2}(-\pi - x) & \text{für } -\pi \leq x < 0, \end{cases}$$

jedoch noch nicht eine gleichmäßige Abschätzung für $\|f_m\|_\infty$. Eine solche Abschätzung folgt aus Lemma 5.1.1, wie in Beispiel 5.1 gezeigt wurde. Denn da wurde gezeigt, dass $\|S_m(f_\infty)\|_\infty$ beschränkt ist und es gilt $f_m(x) = S_m(f_\infty)(x)$. Mit den Überlegungen rund um das Gibbs-Phänomen kann man sogar schließen, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m\|_\infty \leq 1.178 \quad \|f_\infty\|_\infty < 2.$$

Für $\tilde{f}_m$ gilt keine solche Abschätzung, weil

$$|\tilde{f}_m(0)| = \left| \sum_{-m \leq n < 0} \frac{1}{n} \right| \geq \ln(m).$$

Mit (5.4) gibt es also $M \in \mathbb{R}^+$ derart, dass für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\|P_m\|_\infty \leq M, \quad (5.5)$$

während

$$|\tilde{P}_m(0)| \geq \ln(m). \quad (5.6)$$

Dieses unterschiedliche Verhalten und die Tatsache, dass diese $\tilde{P}_m(0)$ auftauchen in der Approximation mit dem Dirichlet-Kern, siehe (5.3), wird nun ausgenutzt für das Gegenbeispiel.

5.3 Das eigentliche Beispiel

Die P_m sind goniometrische Polynome und daher stetig. Wenn man solche Funktionen addiert, dann ist die Summe auch wieder stetig. Dies gilt sogar, wenn man abzählbar viele solche

Funktionen addiert, wenn die Summe in $\|\cdot\|_\infty$ -Norm konvergiert, denn $(C[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum¹.

Definiere die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die als Gegenbeispiel dienen wird, durch

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_{m_k}(x) \quad (5.7)$$

für geschickt gewählten m_k und α_k . Was geschickt heißt, werden wir im Folgenden bestimmen:

- Um die Fourierkoeffizienten der verschiedenen P_{m_k} auseinanderzuhalten, braucht man, siehe (5.2):

$$m_{k+1} > 3m_k. \quad (5.8)$$

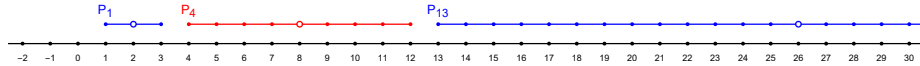


Abbildung 5.1: Nicht-triviale e^{inx} -Koeffizienten von P_1 , P_4 und P_{13}

- Durch (5.5) ist jedes P_{m_k} eine stetige Funktion mit $\|\cdot\|_\infty$ -Norm beschränkt durch M . Wenn $\{|\alpha_k|\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ summierbar ist, dann, wie eben begründet, konvergiert die Summe in (5.7) nach einer stetigen Funktion. Wir nehmen

$$\alpha_k = \frac{1}{k^2} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}^+.$$

Man hätte hier auch eine andere, absolut summierbare Folge nehmen können.

¹Stefan Banach, 1892–1945

- Betrachtet man $S_m(F)(0)$, dann folgt aus (5.6) mit (5.3), dass

$$\begin{aligned} |(S_{2m_\ell} F)(0)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (S_{2m_\ell} P_{m_k})(0) \right| \\ &= \left| \alpha_\ell \tilde{P}_{m_\ell}(0) + \sum_{k=1}^{\ell-1} \alpha_k P_{m_k}(0) \right| \\ &\geq \left| \alpha_\ell \tilde{P}_{m_\ell}(0) \right| - \sum_{k=1}^{\ell-1} |\alpha_k P_{m_k}(0)| \\ &\geq \frac{1}{\ell^2} \ln(m_\ell) - M \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{k^2} \\ &\geq \frac{1}{\ell^2} \ln(m_\ell) - 2M. \end{aligned}$$

Wir können m_ℓ so wählen, dass

$$\frac{1}{\ell^2} \ln(m_\ell) \rightarrow \infty \text{ für } \ell \rightarrow \infty.$$

Dazu nimmt man für $\{m_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge, die „deutlich“ schneller wächst als e^{ℓ^2} und derart ist, dass (5.8) erfüllt ist. Dann ist $\{|S_{2m_\ell}(0)|\}_{\ell \in \mathbb{N}^+}$ unbeschränkt und die Fourierreihenentwicklung $S_m(F)$ konvergiert nicht für $x = 0$. Stein und Shakarchi nehmen

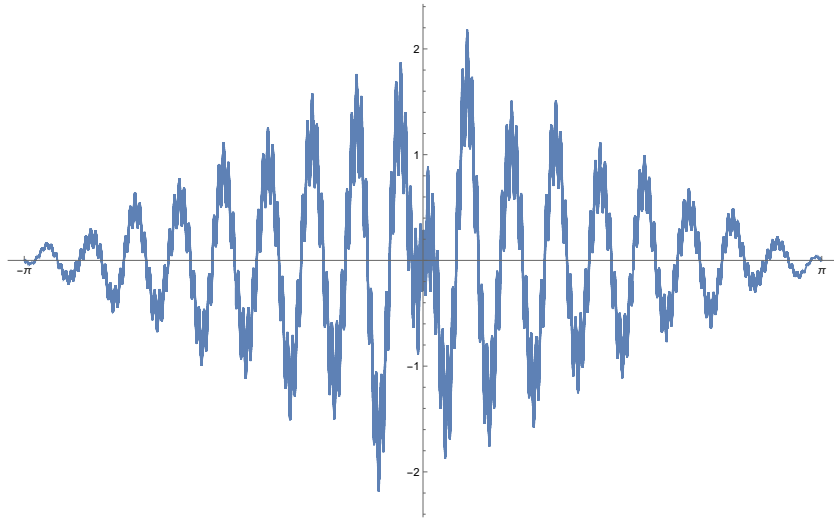
$$m_\ell = 3^{2^\ell}. \quad (5.9)$$

Dann gilt $m_\ell \in \mathbb{N}$,

$$m_{\ell+1} = 3^{2^{\ell+1}} > 3^{2^\ell+1} = 3m_\ell$$

und für $\ell \rightarrow \infty$ folgt:

$$\frac{1}{\ell^2} \ln(m_\ell) = \frac{1}{\ell^2} \ln(3^{2^\ell}) = \frac{2^\ell}{\ell^2} \ln(3) \rightarrow \infty.$$

Abbildung 5.2: Skizze zu $\operatorname{Re}(F(x))$ aus (5.7) mit m_ℓ aus (5.9)

Aufgabe 5.1 Sei F wie oben in (5.7) mit genau diesen α_k und m_k .

1. Stimmt es, dass wir die einzelnen Terme e^{inx} in F wie folgt nach wachsender Potenz n ausschreiben können?

$$\begin{aligned}
 F(x) = & \alpha_1 \frac{e^{im_1x}}{-m_1} + \cdots + \alpha_1 \frac{e^{i(2m_1-1)x}}{-1} + \alpha_1 \frac{e^{i(2m_1+1)x}}{1} + \cdots + \alpha_1 \frac{e^{i3m_1x}}{m_1} + \\
 & \alpha_2 \frac{e^{im_2x}}{-m_2} + \cdots + \alpha_2 \frac{e^{i(2m_2-1)x}}{-1} + \alpha_2 \frac{e^{i(2m_2+1)x}}{1} + \cdots + \alpha_2 \frac{e^{i3m_2x}}{m_2} + \\
 & \alpha_3 \frac{e^{im_3x}}{-m_3} + \cdots + \alpha_3 \frac{e^{i(2m_3-1)x}}{-1} + \alpha_3 \frac{e^{i(2m_3+1)x}}{1} + \cdots + \alpha_3 \frac{e^{i3m_3x}}{m_3} + \\
 & \alpha_4 \frac{e^{im_4x}}{-m_4} + \cdots + \cdots .
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

2. Sei nun F_n die Funktion, die man bekommt, wenn man (5.10) abbricht bei Potenzen größer als n . Konvergiert F_n für $n \rightarrow \infty$?

3. Schreibe

$$\begin{aligned}
 F_r(x) = & \alpha_1 \frac{r^{m_1} e^{im_1x}}{-m_1} + \cdots + \alpha_1 \frac{r^{2m_1-1} e^{i(2m_1-1)x}}{-1} \\
 & + \alpha_1 \frac{r^{2m_1+1} e^{i(2m_1+1)x}}{1} + \cdots + \alpha_1 \frac{r^{3m_1} e^{i3m_1x}}{m_1} \\
 & + \alpha_2 \frac{r^{m_2} e^{im_2x}}{-m_2} + \cdots + \alpha_2 \frac{r^{2m_2-1} e^{i(2m_2-1)x}}{-1} \\
 & + \alpha_2 \frac{r^{2m_2+1} e^{i(2m_2+1)x}}{1} + \cdots + \alpha_2 \frac{r^{3m_2} e^{i3m_2x}}{m_2} \\
 & + \alpha_3 \frac{r^{m_3} e^{im_3x}}{-m_3} + \cdots + \alpha_3 \frac{r^{2m_3-1} e^{i(2m_3-1)x}}{-1} \\
 & + \alpha_3 \frac{r^{2m_3+1} e^{i(2m_3+1)x}}{1} + \cdots + \alpha_3 \frac{r^{3m_3} e^{i3m_3x}}{m_3} \\
 & + \alpha_4 \frac{r^{m_4} e^{im_4x}}{-m_4} + \cdots + \cdots .
 \end{aligned}$$

Konvergiert $\lim_{r \uparrow 1} F_r(x)$?

Konvergenz in $L^2(-\pi, \pi)$



6.1 Der Hilbertraum L^2

Das reelle innere Produkt oder Skalarprodukt sollte schon bekannt sein. Wir wiederholen es hier, um zu vergleichen mit dem komplexen Fall.

Ein **inneres Produkt** auf einen reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. **Symmetrie:** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ für alle $u, v \in V$.
2. **Bilinearität:** $v \mapsto \langle u, v \rangle$ ist linear für alle $u \in V$.

Wegen der ersten Eigenschaft ist auch $u \mapsto \langle u, v \rangle$ linear für alle $v \in V$.

3. **Positiv Definitheit:** $\langle u, u \rangle \in [0, \infty)$ für alle $u \in V$ und $\langle u, u \rangle = 0$ impliziert $u = 0$.

Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein inneres Produkt ist, dann ist $\|\cdot\|$, definiert durch

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (6.1)$$

eine Norm auf V . Man nennt $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen **Prähilbertraum**, oder auch Innenproduktraum, Skalarproduktraum.

Wenn ein Prähilbertraum vollständig ist, also wenn jede Cauchy-Folge im Raum konvergiert, dann nennt man diesen Raum einen **Hilbertraum**¹.

Das komplexe innere Produkt ist vielleicht weniger bekannt.

Definition 6.1.1 Sei V ein komplexer Vektorraum. Ein komplexes inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ hat folgende Eigenschaften:

1. **Schiefsymmetrie:** $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ für alle $u, v \in V$.

¹David Hilbert, 1862-1943

2. **Sesquilinearität:** $v \mapsto \langle u, v \rangle$ ist linear für alle $u \in V$.

Wegen der ersten Eigenschaft gilt in dem Fall

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \bar{\alpha} \langle u, w \rangle + \bar{\beta} \langle v, w \rangle$$

für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

3. **Positiv Definitheit:** $\langle u, u \rangle \in [0, \infty)$ für alle $u \in V$ und $\langle u, u \rangle = 0$ impliziert $u = 0$.

Schiefsymmetrisch wird auch hermitesch genannt nach Hermite². Wegen 3. ist auch hier die Norm in (6.1) wohl-definiert.

In inneren Produkträumen gilt der Satz von Pythagoras:

Wenn $\langle u, v \rangle = 0$, dann folgt $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Theorem 6.1.2 Der Vektorraum $L^2(-\pi, \pi)$ ist ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert durch

$$\langle u, v \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)} v(x) dx.$$

Dieses Ergebnis werden wir hier nicht beweisen. Man sollte bemerken, dass für $L^2(-\pi, \pi)$ die Standardnorm übereinstimmt mit der Norm in (6.1):

$$\|u\| = \|u\|_2 \text{ für alle } u \in L^2(-\pi, \pi).$$

Für die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in L^2(-\pi, \pi)$ findet man so die Formel

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \langle e^{in\cdot}, f \rangle.$$

²Charles Hermite, 1822-1901

Es wird vom Vorteil sein, in der Fourierreihenentwicklung die betreffenden trigonometrischen Funktionen zu normieren³:

$$\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ mit } \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}. \quad (6.2)$$

Definition 6.1.3 Sei H ein Hilbertraum. Eine Menge $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus H nennt man ein **Orthonormalsystem**, wenn

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{n,m} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = m, \\ 0 & \text{wenn } n \neq m. \end{cases}$$

Man nennt $\delta_{n,m}$ das **Kronecker- δ** .⁴

Lemma 6.1.4 Sei H ein Hilbertraum und $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt für alle $u \in H$, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \psi_n, u \rangle|^2 \leq \|u\|_H^2. \quad (6.3)$$

Die Ungleichung in (6.3) ist nach **Bessel**⁵ benannt.

Beweis. Für $k \leq m$ gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_k, u - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, u \rangle \psi_n \right\rangle &= \\ \langle \psi_k, u \rangle - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, u \rangle \langle \psi_k, \psi_n \rangle &= 0 \end{aligned}$$

³Man normiert eine Funktion $u \in H \setminus \{0\}$, indem man sie passend skaliert. Die normierte Funktion wird

$$\tilde{u}(x) := \|u\|_H^{-1} u(x)$$

und erfüllt so $\|\tilde{u}\|_H = 1$.

⁴Leopold Kronecker, 1823-1891

⁵Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846

und daher

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left\| u - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, u \rangle \psi_n \right\|_H^2 \\
 &= \left\langle u - \sum_{k=0}^m \langle \psi_k, u \rangle \psi_k, u - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, u \rangle \psi_n \right\rangle \\
 &= \left\langle u, u - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, u \rangle \psi_n \right\rangle \\
 &\quad - \sum_{k=0}^m \overline{\langle \psi_k, u \rangle} \left\langle \psi_k, u - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, u \rangle \psi_n \right\rangle \\
 &= \left\langle u, u - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, u \rangle \psi_n \right\rangle \\
 &= \|u\|_H^2 - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, u \rangle \langle u, \psi_n \rangle.
 \end{aligned}$$

Weil

$$\langle \psi_n, u \rangle \langle u, \psi_n \rangle = \langle \psi_n, u \rangle \overline{\langle \psi_n, u \rangle} = |\langle \psi_n, u \rangle|^2,$$

folgt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{n=0}^m |\langle \psi_n, u \rangle|^2 \leq \|u\|_H^2.$$

Weil eine beschränkte, wachsende Folge einen Grenzwert hat, folgt (6.3). ■

Korollar 6.1.5 Die Funktionen $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ in (6.2) bilden ein Orthonormalsystem in $L^2(-\pi, \pi)$.

Nimmt man φ_n wie in (6.2), so wird S_m wie folgt

$$S_m(f)(x) = \sum_{n=-m}^m \langle \varphi_n, f \rangle \varphi_n(x).$$

Aufgabe 6.1 Statt $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ kann man auf $L^2(-\pi, \pi)$ auch $\{\cos(nx), \sin((n+1)x)\}_{n \in \mathbb{N}}$

verwenden. Wie ist da das zugehörige Orthonormalsystem?

Aufgabe 6.2 Betrachte $L^2(0, \pi)$ mit innerem Produkt

$$\langle u, v \rangle := \int_0^\pi \overline{u(x)} v(x) dx.$$

1. Skalieren Sie die Funktionen der Fouriersinusreihe derart, dass sie ein Orthonormalsystem bilden in $L^2(0, \pi)$.
2. Skalieren Sie die Funktionen der Fouriercosinusreihe derart, dass auch sie ein Orthonormalsystem bilden in $L^2(0, \pi)$.

6.2 Parallellogrammgleichung

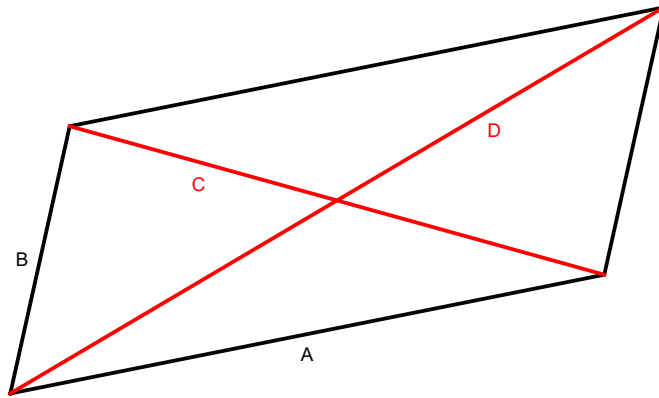
Das innere Produkt liefert eine Norm, aber es gibt auch einen umgekehrten Weg.

Lemma 6.2.1 (Parallellogrammgleichung) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum mit Norm definiert durch $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Dann gilt für alle $u, v \in H$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2} (\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2). \quad (6.4)$$

Beweis. Die Gleichung lässt sich geradeaus beweisen:

$$\begin{aligned}
 &\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \\
 &= \langle u+v, u+v \rangle + \langle u-v, u-v \rangle \\
 &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \\
 &\quad \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\
 &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).
 \end{aligned}$$

Abbildung 6.1: $A^2 + B^2 = \frac{1}{2} (C^2 + D^2)$

Ähnlich kann man auch zeigen, dass man bei einem reellen Prähilbertraum aus der Norm das innere Produkt zurückfinden kann:

Lemma 6.2.2 Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Prähilbertraum mit $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Dann gilt für alle $u, v \in H$, dass

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2). \quad (6.5)$$

Beweis. Direkt ausschreiben ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle) \\ & \quad - \frac{1}{4} (\langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle) = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt braucht man, dass $\langle u, v \rangle$ reell ist. ■

Lemma 6.2.3 (Polarisationsformel) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Prähilbertraum mit $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Dann gilt für alle $u, v \in H$, dass

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \\ \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 - i \|u + iv\|^2 + i \|u - iv\|^2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Beweis. Hier zeigt man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 - i \|u + iv\|^2 + i \|u - iv\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - i \langle u, iv \rangle - i \langle iv, u \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle) = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 6.3 Weniger bekannt ist, dass, wenn bei einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ die Norm (6.4) erfüllt, dieser Vektorraum ein Prähilbertraum ist. Im reellen Fall ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert durch (6.5); im komplexen Fall durch (6.6).

Zeigen Sie dies im reellen Fall. Für die Linearität von $v \mapsto \langle u, v \rangle$ zeigt man zuerst

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$$

Damit findet man $\langle u, nv \rangle = n \langle u, v \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$ und dann auch für $n \in \mathbb{Z}$. Für $q = \frac{n}{m}$ gilt dann

$$m \langle u, qv \rangle = \langle u, nv \rangle = n \langle u, v \rangle$$

und es folgt $\langle u, qv \rangle = q \langle u, v \rangle$. Mit der Stetigkeit der Norm gilt dann auch $\langle u, tv \rangle = t \langle u, v \rangle$ für $t \in \mathbb{R}$. Siehe Abbildung 6.2.

6.3 Approximieren in L^2

Theorem 6.3.1 Sei $f \in L^2(-\pi, \pi)$ und $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ wie in (6.2). Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - S_m(f)\|_2 = 0$$

und

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle \varphi_n, f \rangle|^2. \quad (6.7)$$

Die Gleichung in (6.7) ist nach **Parseval**⁶ benannt.

Beweis. Mit

$$S_m(f)(x) = \sum_{n=-m}^m f_n \varphi_n$$

folgt für $m \geq |n|$, dass

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, f - S_m(f) \rangle &= \langle \varphi_n, f \rangle - \langle \varphi_n, S_m(f) \rangle \\ &= \langle \varphi_n, f \rangle - \sum_{k=-m}^m \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, f \rangle \\ &= \langle \varphi_n, f \rangle - \sum_{k=-m}^m \delta_{nk} \langle \varphi_k, f \rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Für $g \in \text{Span} \left[\{\varphi_n\}_{|n| \leq m} \right]$, sagen wir $g(x) = \sum_{n=-m}^m g_n \varphi_n(x)$,

folgt dann aus (6.8) Pythagoras-ähnlich, dass

$$\begin{aligned} &\left\| f - \sum_{n=-m}^m g_n \varphi_n \right\|_2^2 \\ &= \left\| (f - S_m(f)) + \sum_{n=-m}^m (f_n - g_n) \varphi_n \right\|_2^2 \\ &= \|f - S_m(f)\|_2^2 + \left\| \sum_{n=-m}^m (f_n - g_n) \varphi_n \right\|_2^2 \\ &\geq \|f - S_m(f)\|_2^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Das heißt, man bekommt die beste Approximation in L^2 -Norm von f in $\text{Span} \left[\{\varphi_n\}_{|n| \leq m} \right]$, wenn man die Fourierkoeffizienten nimmt.

Sei $\varepsilon > 0$. Weil $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ dicht liegt in $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$, gibt es $f_s \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ mit

$$\|f - f_s\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Wegen Theorem 4.2.6 gilt, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_s - F_m(f_s)\|_\infty \rightarrow 0$$

und weil $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_\infty$, folgt auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_s - F_m(f_s)\|_2 \rightarrow 0.$$

Sei nun $m_{s,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ derart, dass für $m \geq m_{s,\varepsilon}$ gilt

$$\|f_s - F_m(f_s)\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Wir finden wegen (6.9), dass für $m \geq m_{s,\varepsilon}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|f - S_m(f)\|_2 &\leq \|f - F_m(f_s)\|_2 \\ &\leq \|f - f_s\|_2 + \|f_s - F_m(f_s)\|_2 < \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.10)$$

⁶Marc-Antoine Parseval, 1755-1836

Die Ungleichung in (6.10) zeigt auch, dass

$$\|S_m(f)\|_2 - \varepsilon \leq \|f\|_2 \leq \|S_m(f)\|_2 + \varepsilon$$

und weil

$$\begin{aligned} \|S_m(f)\|_2^2 &= \sum_{k=-m}^m \sum_{n=-m}^m \langle \varphi_n, f \rangle \langle f, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi_n \rangle \\ &= \sum_{n=-m}^m |\langle \varphi_n, f \rangle|^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

bilden die Terme in (6.11) eine konvergente Folge mit Grenzwert wie in (6.7). ■

Korollar 6.3.2 Seien $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ und $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ wie in (6.2). Dann gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle. \quad (6.12)$$

Bemerkung 6.3.3 Nimmt man $f = g$, dann folgt aus dem Korollar sofort (6.7). Weil sie äquivalent sind, nennt man auch (6.12) die Parsevalsche Gleichung.

Aufgabe 6.4 Beweisen Sie dieses Korollar.

6.4 Vollständiges Orthonormalsystem

Man kann diese Resultate allgemeiner formulieren. Dazu geben wir erst eine Definition.

Definition 6.4.1 Sei H ein Hilbertraum. Eine Menge $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus H nennt man ein **Vollständiges Orthonormalsystem** für H , wenn

1. $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Orthonormalsystem, und
2. jede Funktion $u \in H$ lässt sich in der $\|\cdot\|_H$ -Norm approximieren mit Funktionen in

$$\text{Span} [\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}].$$

$$\text{NB. } \|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Lemma 6.4.2 Sei H ein Hilbertraum mit $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in H$ als Vollständiges Orthonormalsystem. Dann gilt die Identität von Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \psi_n, f \rangle|^2.$$

Beweis. Wenn f approximiert wird durch $\sum_{n=0}^m c_{n,m} \psi_n$ in H -Norm, dann folgt wie in (6.9), dass

$$\left\| f - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, f \rangle \psi_n \right\|_H \leq \left\| f - \sum_{n=0}^m c_{n,m} \psi_n \right\|_H$$

und daher

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, f \rangle \psi_n \right\|_H = 0.$$

Die Gleichung folgt aus

$$\|f\|_H^2 = \left\| f - \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, f \rangle \psi_n \right\|_H^2 + \left\| \sum_{n=0}^m \langle \psi_n, f \rangle \psi_n \right\|_H^2.$$

■

Lemma 6.4.3 Die Menge $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, definiert in (6.2), ist ein Vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(-\pi, \pi)$.

Beweis. In Lemma 6.1.4 wurde bewiesen, dass $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Orthogonalsystem ist, und in Theorem 6.3.1 findet man die Vollständigkeit. ■

Lemma 6.4.2 mit Lemma 6.4.3 zeigen eine Verbindung zwischen $L^2(-\pi, \pi)$ und ℓ^2 . Der Raum ℓ^2 besteht aus allen quadratisch summierbaren Folgen komplexer Zahlen. Einfachheit halber nehmen wir hier Folgen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{C}$, statt $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$. Dann setzt man

$$\ell^2 := \left\{ \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} ; c_n \in \mathbb{C} \text{ und } \|\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2} < \infty \right\} \text{ mit}$$

$$\|\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Auch ℓ^2 ist ein Hilbertraum mit

$$\langle \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{d_n}.$$

Korollar 6.4.4 Sei $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definiert in (6.2).

1. Wenn $\{c_n\} \in \ell^2$, dann ist $u := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi_n \in L^2(-\pi, \pi)$ und

$$\|u\|_2 = \|\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2}.$$

2. Wenn $u \in L^2(-\pi, \pi)$, dann ist $\{\langle \varphi_n, u \rangle\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2$ und

$$\|\{\langle \varphi_n, u \rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2} = \|u\|_2.$$

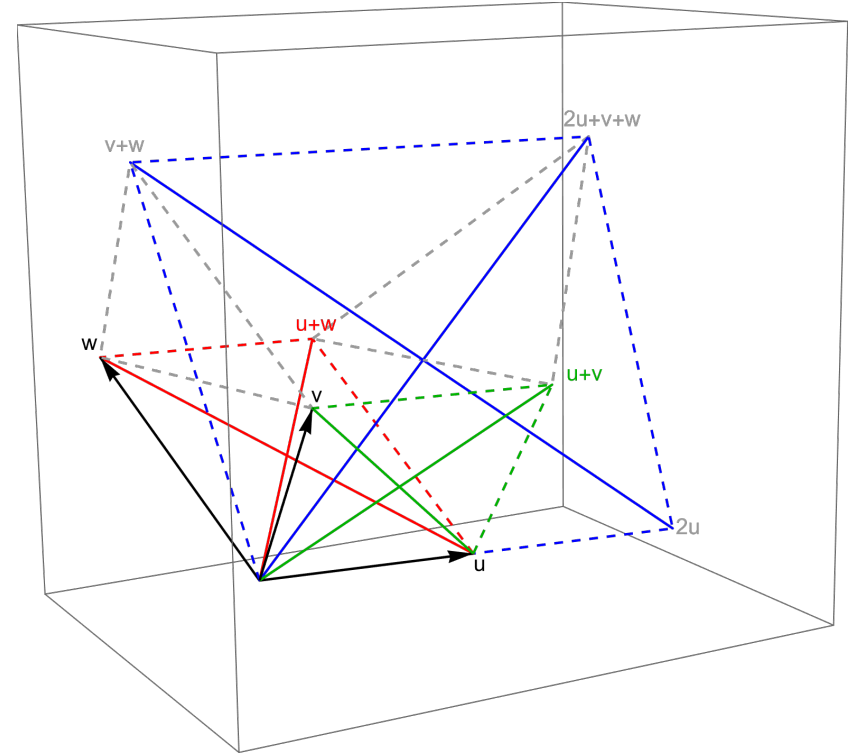


Abbildung 6.2: Um $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ zu zeigen, muss man schon mehrmals die Parallelogrammgleichung verwenden.

Fourieranalysis

Kapitel 7

Fourier-Transformation in $L^1(\mathbb{R})$



7.1 Elementares

Wenn man das Intervall skaliert von $(-\pi, \pi)$ nach $(-a, a)$, dann werden die Funktionen für die Fourierreihenentwicklung, wenn man sie normiert

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{in\pi x/a} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Lässt man a sehr groß werden, dann scheint das 0 zu werden. So direkt kann man es also nicht verallgemeinern.

Man definiert die Fourier-Transformation für geschickte Funktionen durch

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx. \quad (7.1)$$

Während bei Fourierreihen eine Funktion festgelegt wird mittels einer Folge von Koeffizienten, wird bei der Fourier-Transformation eine Funktion auf $\mathbb{R}$ transformiert zu einer

anderen Funktion auf $\mathbb{R}$. Wenn die Fourier-Transformation der Funktionen f und g wohl-definiert ist, dann ist sie auch für $\alpha f + \beta g$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, wohl-definiert und

$$\mathfrak{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha \mathfrak{F}(f)(\xi) + \beta \mathfrak{F}(g)(\xi).$$

Die Fourier-Transformation ist eine lineare Abbildung.

Das Integral in (7.1) ist wohl-definiert, wenn $f \in L^1(\mathbb{R})$, also Lebesgue-integrierbar ist und

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty.$$

In dem Fall gilt $|e^{-2\pi i x \xi} f(x)| = |f(x)|$ und (7.1) ist auch wohl-definiert als Lebesgue-Integral. Sogar diese Abschätzung gilt

sofort:

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F}(f)\|_\infty &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2\pi i x \xi} f(x)| dx = \|f\|_1. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Man kann sogar mehr sagen:

Theorem 7.1.1 (Riemann-Lebesgue) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und sei $\mathfrak{F}f$ definiert in (7.1). Dann gilt Folgendes:

1. $\mathfrak{F}f$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$;
2. $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathfrak{F}f(\xi) = 0$.

Bemerkung 7.1.2 Die erste und auch die letzte Eigenschaft zeigen, dass $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ nicht surjektiv ist.

Beweis. Zu 1: Für die gleichmäßige Stetigkeit betrachten wir $|(\mathfrak{F}f)(\xi + \eta) - (\mathfrak{F}f)(\xi)|$. Weil

$$\begin{aligned} &|(\mathfrak{F}f)(\xi + \eta) - (\mathfrak{F}f)(\xi)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i x \cdot \xi} (e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) f(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) f(x)| dx \leq 2 \|f\|_1 \end{aligned}$$

kann man das Majorisierte-Konvergenz-Theorem von Lebesgue verwenden und findet, dass

$$\begin{aligned} &\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |(e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) f(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\eta \rightarrow 0} |(e^{-2\pi i x \cdot \eta} - 1) f(x)| dx = 0. \end{aligned}$$

Weil die letzte Abschätzung nicht von ξ abhängt, ist $\xi \mapsto \mathfrak{F}f(\xi)$ sogar gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^n$.

Zu 2: Sei $\varepsilon > 0$. Weil $f \in L^1(\mathbb{R})$, gibt es $M > 0$ derart, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-M, M]} |e^{-2\pi i x \xi} f(x)| dx = \int_{\mathbb{R} \setminus [-M, M]} |f(x)| dx < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Wegen Korollar 3.3.2 von Theorem 3.3.1 gibt es n_ε mit für $|n| > n_\varepsilon$:

$$\left| \int_{[-M, M]} e^{-inx} f(x) dx \right| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Es gilt also

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} f(x) dx \right| = 0.$$

Wir müssen noch zeigen, dass dieser Grenzwert nicht nur für ganzzahlige n gilt. Schaut man sich den Beweis von Theorem 3.3.1 an, dann findet man für

$$\tilde{f}_c(x) = e^{-icx} f(x),$$

dass auch

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \sup_{c \in [0, 2\pi]} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} \tilde{f}_c(x) dx \right| = 0.$$

Es gilt nämlich, dass $\|\tilde{f}_c\|_1 = \|f\|_1$ und wenn $f_s \in C(\mathbb{R})$ die Funktion f in L^1 -Norm approximiert, dass

$$\tilde{f}_{c,s}(x) := e^{-icx} f_s(x)$$

die Funktion $\tilde{f}_c$ auf gleiche Art approximiert:

$$\|\tilde{f}_{c,s} - \tilde{f}_c\|_1 = \|f_s - f\|_1.$$

Setzt man $n = [2\pi\xi]$, dann gilt $2\pi\xi - n \in [0, 2\pi]$ und

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} f_c(x) dx.$$

Das letzte impliziert

$$\lim_{\mathbb{R} \ni |\xi| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx = \lim_{\mathbb{N} \ni |n| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} f_c(x) dx = 0$$

und die zweite Behauptung. ■

Bemerkung 7.1.3 Weil die Funktion g , definiert durch $g(\xi) = \sin(\xi^2)$ in $L^\infty(\mathbb{R})$ liegt, jedoch sogar beide Ergebnisse des letzten Theorems nicht erfüllt, ist die Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R})$ nach $L^\infty(\mathbb{R})$ nicht surjektiv.

Beispiel 7.1 Wir schauen die Fourier-Transformation von $f(x) = 1_{[-1,1]}(x)$ an. Die Berechnung zeigt für $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f)(\xi) &= \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{i}{2\pi\xi} (e^{-2\pi i \xi} - e^{2\pi i \xi}) \\ &= \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \end{aligned}$$

und für $\xi = 0$ folgt $\mathfrak{F}(f)(0) = 2$. Die Fouriertransformierte $\mathfrak{F}(f)$ liegt nicht nur in $L^\infty(\mathbb{R})$, sondern, weil

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!},$$

gilt sogar $\mathfrak{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Man berechnet auch direkt, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{F}(f)(\xi)| d\xi &\geq 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{|\sin(2\pi\xi)|}{\pi(k+1)/2} d\xi \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k+1} = \infty, \end{aligned}$$

und damit folgt $\mathfrak{F}(f) \notin L^1(\mathbb{R})$. □

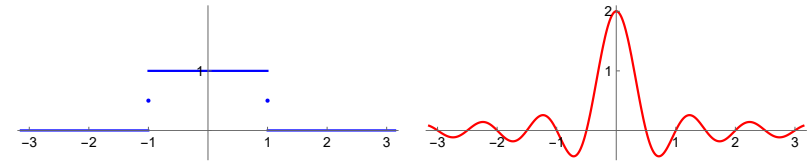


Abbildung 7.1: Skizzen zu f und $\mathfrak{F}(f)$ aus Beispiel 7.1

Das Beispiel zeigt, dass $L^1(\mathbb{R})$ wahrscheinlich nicht der optimale Vektorraum ist für die Fourier-Transformation. Der Vektorraum $L^\infty(\mathbb{R})$ hat Funktionen, für die das Lebesgue-Integral nicht definiert ist. Man könnte hoffen, $L^2(\mathbb{R})$ wäre der passende Vektorraum, und das stimmt auch, lässt sich jedoch nicht so leicht beweisen. Für ein beschränktes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ gilt zwar

$$L^\infty(a, b) \subset L^2(a, b) \subset L^1(a, b),$$

aber das lässt sich nicht verallgemeinern auf unbeschränkte Intervalle.

Aufgabe 7.1 Zur Auswahl steht $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ und $L^\infty(\mathbb{R})$.

1. In welchen dieser Räume liegt f , definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}?$$

2. In welchen dieser Räume liegt g , definiert durch

$$g(x) = \frac{1}{|x|^{1/3} + |x|^{2/3}}?$$

Aufgabe 7.2 Zeigen Sie, dass jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ zu zerlegen ist als $f = g + h$ mit $g \in L^1(\mathbb{R})$ und $h \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Beispiel 7.2 Wir betrachten eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die in $L^p(\mathbb{R})$ liegt für alle $p \in [1, \infty]$:

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Wir finden

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} e^{-x^2} dx \\ &= e^{-\pi^2 \xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+\pi i \xi)^2} dx. \end{aligned}$$

Wenn man mit einer Vorlesung Komplexe Funktionen erkannt hat, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+\pi i \xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

dann findet man

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \xi^2}.$$

□

Aufgabe 7.3 Zeigen Sie, dass für $f(x) = e^{-\pi x^2}$ gilt $\mathfrak{F}(f) = f$.

7.2 Rechenregeln bei der Fourier-Transformation

Lemma 7.2.1 Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist die Faltung dieser beiden Funktionen, definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

auch eine $L^1(\mathbb{R})$ -Funktion.

Beweis. Eine Funktion f liegt in $L^1(A)$, wenn die Funktion Lebesgue-messbar ist auf A und $\int_A |f(x)| dx < \infty$. Für die Lebesgue-Messbarkeit von $f * g$ verweisen wir auf die Vorlesung Analysis 3. Das beschränkte Integral folgt aus dem Satz von Fubini¹-Tonelli²:

$$\begin{aligned} \int |(f * g)(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(y)| |f(x-y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx dy = \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

■

¹Guido Fubini, 1879-1943

²Leonida Tonelli, 1886-1946

Lemma 7.2.2 *Eigenschaften der Fourier-Transformation.*

1. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$(\mathfrak{F}(f * g))(\xi) = (\mathfrak{F}f)(\xi) (\mathfrak{F}g)(\xi).$$

2. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$ und $f_h(x) := f(x + h)$ gilt

$$(\mathfrak{F}f_h)(\xi) = e^{2\pi i h \xi} (\mathfrak{F}f)(\xi).$$

3. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$ und $f^h(x) := e^{2\pi i h x} f(x)$ gilt

$$(\mathfrak{F}f^h)(\xi) = (\mathfrak{F}f)(\xi - h).$$

4. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^+$ und $f_c(x) := f(cx)$ gilt

$$(\mathfrak{F}f_c)(\xi) = c^{-1} (\mathfrak{F}f)(c^{-1}\xi).$$

5. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$(\mathfrak{F}(f'))(\xi) = 2\pi i \xi (\mathfrak{F}f)(\xi).$$

6. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $g(x) = xf(x)$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$(\mathfrak{F}g)(\xi) = \frac{1}{-2\pi i} (\mathfrak{F}f)'(\xi).$$

Beweis. zu 1.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f * g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(x-y)\xi} f(x - y)dx e^{-2\pi i y \xi} g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x)dx e^{-2\pi i y \xi} g(y)dy \\ &= \mathfrak{F}(f)(\xi) \mathfrak{F}(g)(\xi). \end{aligned}$$

zu 2.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}f_h)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x + h)dx \\ &= e^{2\pi i h \xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i(x+h)\xi} f(x + h)dx \\ &= e^{2\pi i h \xi} (\mathfrak{F}f)(\xi). \end{aligned}$$

zu 3.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}f^h)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} e^{2\pi i h x} f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x(\xi - h)} f(x)dx \\ &= (\mathfrak{F}f)(\xi - h). \end{aligned}$$

zu 4.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}f_c)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(cx)dx \\ &= c^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y \xi / c} f(y)dy \\ &= c^{-1} (\mathfrak{F}f)(c^{-1}\xi). \end{aligned}$$

zu 5. Aus $f \in L^1(\mathbb{R})$ folgt nicht, dass $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, jedoch schon, dass es $x_n \rightarrow \infty$ und $y_n \rightarrow -\infty$ gibt mit $f(x_n) \rightarrow 0$ und $f(y_n) \rightarrow 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}(f'))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f'(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_n}^{x_n} e^{-2\pi i x \xi} f'(x)dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{y_n}^{x_n} \frac{d}{dx} (e^{-2\pi i x \xi} f(x)) - \left(\frac{d}{dx} e^{-2\pi i x \xi} \right) f(x) dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left([e^{-2\pi i x_n \xi} f(x_n) - e^{-2\pi i y_n \xi} f(y_n)] \right. \\
&\quad \left. - \int_{y_n}^{x_n} \left(\frac{d}{dx} e^{-2\pi i x \xi} \right) f(x) dx \right) \\
&= 2\pi i \xi \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_n}^{x_n} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx = 2\pi i \xi (\mathfrak{F}f)(\xi).
\end{aligned}$$

zu 6. Weil

$$\left| \frac{e^{-2\pi i x(\xi+h)} - e^{-2\pi i x \xi}}{h} \right| = \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} \right| \leq 2\pi x$$

und weil $\int_{\mathbb{R}} |xf(x)| dx < \infty$, gilt wegen majorisierter Konvergenz, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x(\xi+h)} - e^{-2\pi i x \xi}}{h} f(x) dx = \\
&\int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i x(\xi+h)} - e^{-2\pi i x \xi}}{h} f(x) dx.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F}g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} x f(x) dx \\
&= \frac{1}{-2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi} (e^{-2\pi i x \xi}) f(x) dx \\
&= \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx = \frac{1}{-2\pi i} (\mathfrak{F}f)'(\xi).
\end{aligned}$$

■

7.3 Approximieren mit Friedrichs

Wir kommen nochmals zurück auf gute Kerne. So etwas kann man auch auf $\mathbb{R}$ formulieren:

Definition 7.3.1 Man nennt die Familie von Funktionen

$$\{K_m \in L^1(\mathbb{R})\}_{m \in \mathbb{N}}$$

einen **guten Kern** auf $\mathbb{R}$, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\int_{\mathbb{R}} K_m(x) dx = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$;
2. Es gibt $M \in \mathbb{R}^+$ mit $\int_{\mathbb{R}} |K_m(x)| dx \leq M$ für alle $m \in \mathbb{N}$;
3. Für alle $\delta > 0$ gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\delta < |x|} |K_m(x)| dx = 0$.

Ein sehr bekannter guter Kern ist hier der **Friedrichs'sche Glätter**³. Dazu nimmt man zuerst $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Siehe Abbildung 7.2.

Aufgabe 7.4 Sie sollen zeigen, dass $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beweisen Sie dazu die nächsten Behauptungen:

1. Für $|x| < 1$ gilt: $\Phi^{(k)}(x) = \frac{p_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ mit p_k ein Polynom.
2. $e^s \geq 1 + \frac{1}{k!} s^k$ für alle $s > 0$ und $k \in \mathbb{N}$.
3. $\lim_{s \rightarrow \infty} s^m / e^s = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

³Kurt Otto Friedrichs, 1901-1982

4. $\lim_{x \uparrow 1} \frac{p(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = 0$ für jedes Polynom.

5. Die linke k -te Ableitung von Φ in 1 gleicht

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{0-\Phi^{k-1}(x)}{1-x} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{p_{k-1}(x)}{(1-x^2)^{2k-1}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = 0.$$

6. Kombinieren Sie diese Schritte, um $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ zu beweisen.

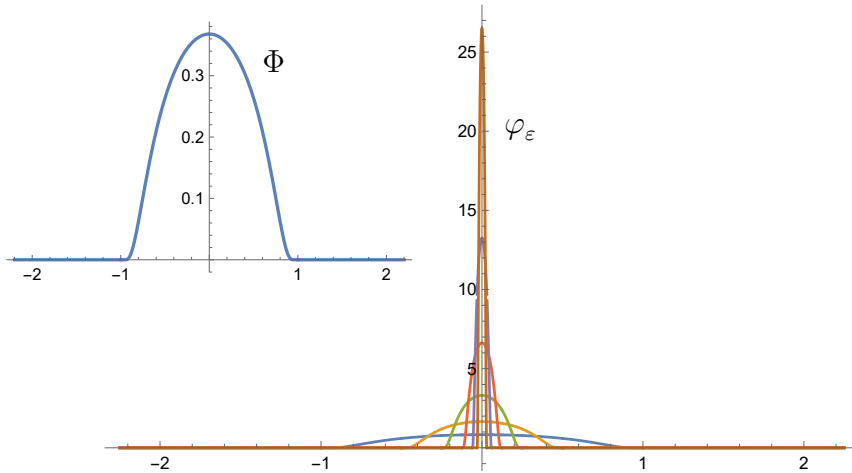


Abbildung 7.2: φ_ε mit $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ aus dem Friedrichs'schen Glätter

Als Nächstes setzt man

$$\varphi_1(x) = \Phi(x) / \|\Phi\|_1$$

und für $\varepsilon > 0$:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \varphi_1(x/\varepsilon). \quad (7.3)$$

Diese Funktionen $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ nennt man den Friedrichs'schen Glätter. Außer, dass dieser Glätter $C(\mathbb{R})$ -Funktionen jedenfalls lokal durch $C^\infty(\mathbb{R})$ -Funktionen approximiert, hat er weitere schöne Eigenschaften, die wir hier nur auflisten werden. Die Approximation u_ε von u ist wie folgt definiert:

$$u_\varepsilon(x) := (\varphi_\varepsilon * u)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy. \quad (7.4)$$

Man soll bemerken, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y)u(x-y)dy$$

und dass die Funktion u nur lokal „ausgeschmiert“ wird.

Das Integral in (7.4) ist wohl-definiert für $u \in L^1_{\text{lokal}}(\mathbb{R})$.

Definition 7.3.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $p \in [1, \infty)$.

1. Dann ist $L^p(\Omega)$ die Menge aller Lebesgue-messbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, mit

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

2. $L^p_{\text{lokal}}(\Omega)$ ist die Menge aller Lebesgue-messbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$, mit

$$\left(\int_K |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$.

Die folgenden beiden Ergebnisse werden wir nicht beweisen.

Theorem 7.3.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Dann ist $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ ein normierter Raum und sogar ein Banachraum.

Theorem 7.3.4 (Friedrichs'scher Glätter) Sei $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1]}$ definiert in (7.3) und u_ε wie in (7.4).

1. Wenn $u \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ außerdem gleichmäßig stetig ist, dann gilt

$$\|u_\varepsilon\|_\infty \leq \|u\|_\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u - u_\varepsilon\|_\infty = 0.$$

2. Für $p \in [1, \infty)$ und $u \in L^p(\mathbb{R})$ gilt $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u \in L^p(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\|u_\varepsilon\|_p \leq \|u\|_p \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u - u_\varepsilon\|_p = 0.$$

7.4 Der Schwartz-Raum

Der **Schwartz⁴-Raum** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ wird auch den Vektorraum der schnell-fallenden, beliebig oft differenzierbaren Funktionen genannt und ist definiert mit **Halbnormen**.

Definition 7.4.1 Eine Halbnorm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V erfüllt:

1. $\|u\| \geq 0$ für alle $u \in V$;

⁴Laurent Schwartz, 1915-2002

2. $\|tu\| = |t| \|u\|$ für alle $u \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$);

3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ für alle $u, v \in V$.

Nur die strikte Positivität, die bei einer Norm gilt, fehlt bei einer Halbnorm.

Definition 7.4.2 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_{k,\ell} < \infty \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{N}.$$

für die Halbnormen

$$\|f\|_{k,\ell} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell f(x) \right|.$$

Wenn eine Funktion beliebig oft differenzierbar ist, dann existiert $\left(\frac{d}{dx} \right)^\ell f(x)$ an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ und ist

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell f(x) \right| \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

eindeutig festgelegt. Die Funktionen, bei denen dieser Ausdruck für alle k und ℓ in $\mathbb{N}$ eine Zahl liefert (∞ ist keine Zahl), sind Funktionen in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Für solche Funktionen folgt direkt, dass $\|\cdot\|_{k,\ell}$ die Eigenschaften einer Halbnorm hat.

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist nicht nur ein Vektorraum, sondern auch Folgendes kann man direkt zeigen:

Lemma 7.4.3 Wenn $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann liegt auch fg und $x \mapsto x^k \partial_x^\ell f(x)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 7.5 Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Aufgabe 7.6 Jede $L^1(\mathbb{R})$ -Funktion kann man in L^1 -Norm durch stetige Funktionen approximieren.

1. Wie kann man eine Funktion in $C[-\pi, \pi]$ in L^∞ -Norm mit $C^\infty[-\pi, \pi]$ -Funktionen approximieren?
2. Zeigen Sie, dass man jede $L^1(\mathbb{R})$ -Funktion in L^1 -Norm mit Funktionen in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ approximieren kann.

Die $L^2(\mathbb{R})$ -Norm und auch die $L^\infty(\mathbb{R})$ -Norm sind zwar Normen auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, jedoch wird der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ damit nicht vollständig. Es ist schon bequem, wenn der Grenzwert einer Funktionenfolge wieder eine Funktion im gleichen Raum ist. Eine einfache Norm, die $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vollständig macht, gibt es nicht. Eine Struktur, die eng mit Banachräumen verwandt ist und man hier verwenden kann, sind Frécheträume. Um dies zu definieren, brauchen wir eine Metrik für einen Vektorraum V .

Definition 7.4.4 Die Funktion $d : V \times V \rightarrow [0, \infty)$ ist eine **Metrik** auf dem Vektorraum V , wenn Folgendes erfüllt ist:

1. **Positivität:** $d(u, v) \geq 0$ und $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ für alle $u, v \in V$.
2. **Symmetrie:** $d(u, v) = d(v, u)$ für alle $u, v \in V$.
3. **Dreiecksungleichung:** $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

In dem Fall nennt man (V, d) einen **metrischen Raum**.

Definition 7.4.5 Sei (V, d) ein metrischer Vektorraum.

- $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in (V, d) , wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$m, n > m_\varepsilon \implies d(u_m, u_n) < \varepsilon.$$

- $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine konvergente Folge in (V, d) , wenn es $u \in V$ gibt und für alle $\varepsilon > 0$ ein $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$m > m_\varepsilon \implies d(u_m, u) < \varepsilon.$$

Bemerkung 7.4.6 Stetigkeit einer Abbildung zwischen metrischen Räumen definiert man durch: die Bilder von Cauchy-Folgen sind wieder Cauchy-Folgen. Hier wird Cauchy-Folge mit der Metrik definiert.

Definition 7.4.7 Man nennt (V, d) einen **Fréchetraum**⁵, wenn jede Cauchy-Folge in (V, d) konvergiert in (V, d) .

Bemerkung 7.4.8 Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum, wenn man die Metrik wie folgt nimmt:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Ein Fréchetraum ist ein vollständiger metrischer Raum. Jeder Banachraum ist ein Fréchetraum.

Theorem 7.4.9 Sei $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Vektorraum in Definition 7.4.2 und sei $d_S : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$d_S(u, v) = \sum_{k, \ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+\ell}} \frac{\|u - v\|_{k, \ell}}{1 + \|u - v\|_{k, \ell}}.$$

Dann ist d_S eine Metrik auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S)$ ist ein Fréchetraum.

⁵Maurice Fréchet, 1878-1973

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften einer Metrik zeigt man direkt für d_S . Die dritte Eigenschaft folgt aus der Konkavität der wachsenden Funktion

$$f(t) := \frac{t}{1+t} \text{ auf } [0, \infty), \quad (7.5)$$

denn diese Konkavität impliziert, dass

$$f(a+b) - f(a) \leq f(b) - f(0) \text{ für } a, b \in [0, \infty), \quad (7.6)$$

was hier bedeutet:

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \text{ für } a, b \in [0, \infty). \quad (7.7)$$

Man kann es auch ausschreiben.

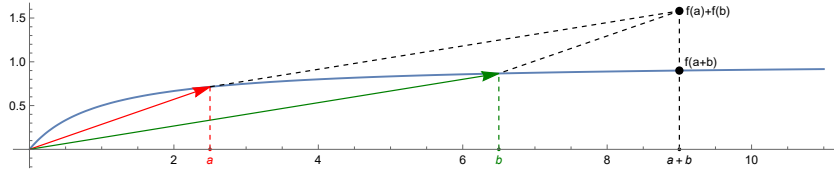


Abbildung 7.3: f aus (7.5) ist konkav

Weil f wachsend ist und

$$\|u - w\|_{k,\ell} \leq \|u - v\|_{k,\ell} + \|v - w\|_{k,\ell},$$

folgt

$$\frac{\|u - w\|_{k,\ell}}{1 + \|u - w\|_{k,\ell}} \leq \frac{\|u - v\|_{k,\ell} + \|v - w\|_{k,\ell}}{1 + \|u - v\|_{k,\ell} + \|v - w\|_{k,\ell}}$$

und die Ungleichung in (7.7) impliziert

$$\begin{aligned} \frac{\|u - v\|_{k,\ell} + \|v - w\|_{k,\ell}}{1 + \|u - v\|_{k,\ell} + \|v - w\|_{k,\ell}} \\ \leq \frac{\|u - v\|_{k,\ell}}{1 + \|u - v\|_{k,\ell}} + \frac{\|v - w\|_{k,\ell}}{1 + \|v - w\|_{k,\ell}}. \end{aligned}$$

Nun kommen wir zu Fréchet. Wenn $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S)$ ist, dann ist diese Folge auch eine Cauchy-Folge in $(C^m(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^m(\mathbb{R})})$. Weil der letzte Raum ein Banachraum ist, existiert $u_\infty \in C^m(\mathbb{R})$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_\infty\|_{C^m(\mathbb{R})} = 0.$$

Ebenso ist $(C^k(\mathbb{R}), \sum_{m=0}^k \|\cdot\|_{m,\ell})$ mit

$$\|\cdot\|_{*,k,\ell} := \sum_{m=0}^k \|\cdot\|_{m,\ell}$$

ein Banachraum mit $\tilde{u}_\infty \in C^k(\mathbb{R})$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \tilde{u}_\infty\|_{*,k,\ell} = 0.$$

Weil auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \tilde{u}_\infty\|_{C^m(\mathbb{R})} = 0$, findet man $u_\infty = \tilde{u}_\infty$. Auf diese Art bekommt man einen eindeutigen Kandidaten für die Limesfunktion. Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar und beschränkt nach Multiplikation mit x^ℓ , liegt also in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Konvergenz haben wir aber so noch nicht gezeigt.

Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S)$ und sei $\varepsilon > 0$.
Weil

$$\begin{aligned} \sum_{k+\ell \geq m} \frac{1}{2^{k+\ell}} \frac{\|u - v\|_{k,\ell}}{1 + \|u - v\|_{k,\ell}} &\leq \sum_{k+\ell \geq m} \frac{1}{2^{k+\ell}} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2^m} (2m+4), \end{aligned}$$

kann man m_ε derart wählen, dass für $m \geq m_\varepsilon$ gilt

$$\sum_{k+\ell \geq m} \frac{1}{2^{k+\ell}} \frac{\|u_n - u_\infty\|_{k,\ell}}{1 + \|u_n - u_\infty\|_{k,\ell}} < \varepsilon.$$

Der Rest in $d_S(u_n, u_\infty)$ besteht aus $\frac{1}{2} (m+1)(m+2)$ -Termen. Weil da nur endlich viele Terme stehen, kann man n_ε so groß wählen, dass für $n > n_\varepsilon$ gilt

$$\sum_{k+\ell < m} \frac{1}{2^{k+\ell}} \frac{\|u_n - u_\infty\|_{k,\ell}}{1 + \|u_n - u_\infty\|_{k,\ell}} < \varepsilon.$$

Dann folgt für $n > \max(m_\varepsilon, n_\varepsilon)$, dass $d_S(u_n, u_\infty) < 2\varepsilon$. ■

Beispiel 7.3 Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = e^{-x^2}$$

ist eine Funktion in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es gilt

$$g_{m,\ell}(x) := x^m \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell e^{-x^2} = x^m p_\ell(x) e^{-x^2}$$

für ein Polynom p_ℓ von Grad ℓ und $\|g_{m,\ell}\|_\infty < \infty$ für alle $m, \ell \in \mathbb{N}$. □

7.5 Fourier-Transformation in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Zwei der Eigenschaften der Fourier-Transformation, die in Lemma 7.2.2 mit Bedingungen an f bewiesen wurden, sind

$$\mathfrak{F}(x \mapsto f'(x))(\xi) = 2\pi i \xi (\mathfrak{F}f)(\xi)$$

und

$$\mathfrak{F}(x \mapsto xf(x))(\xi) = \frac{1}{-2\pi i} (\mathfrak{F}f)'(\xi).$$

Für Funktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sind diese Bedingungen erfüllt. Grob gesagt sieht man, abgesehen von dem Faktor $2\pi i$, dass Ableiten und Multiplikation mit der Variablen nach der Transformation sich ändern in Multiplikation mit der Variablen und Ableiten. Sie vertauschen sich sozusagen. Die Schwartz-Funktionen scheinen dafür gemacht zu sein:

$$\mathfrak{F}\left(x \mapsto x^m \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell f(x)\right)(\xi) = \frac{(2\pi i)^\ell}{(-2\pi i)^m} \xi^\ell \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^m (\mathfrak{F}f)(\xi).$$

Lemma 7.5.1 Wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann gilt $\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Die Abbildung

$$\mathfrak{F}: (\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S)$$

ist sogar stetig.

Beweis. Sei $m, \ell \in \mathbb{N}$. Wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| x^m \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell f(x) \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1} \left(\|f\|_{m+2,\ell} + \|f\|_{m,\ell} \right) dx \\ &= \pi \left(\|f\|_{m+2,\ell} + \|f\|_{m,\ell} \right) \end{aligned}$$

und das bedeutet

$$\left(x \mapsto x^m \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell f(x)\right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Weil $\|\mathfrak{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$, folgt

$$\left(\xi \mapsto \xi^\ell \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^m (\mathfrak{F}f)(\xi)\right) \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Weil dies für jedes m und ℓ gilt, folgt $\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Für die Stetigkeit bemerkt man, dass die obigen Abschätzungen das Folgende implizieren:

$$\|\mathfrak{F}f\|_{\ell,m} \leq 2^{m-\ell} \pi^{1+m-\ell} \left(\|f\|_{m+2,\ell} + \|f\|_{m,\ell}\right).$$

Daraus folgt, dass wenn $d_S(f, f_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, auch gilt

$$d_S(\mathfrak{F}f, \mathfrak{F}f_n) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Die dazugehörigen Abschätzungen zeigt man wie im Beweis von Theorem 7.4.9. ■

Theorem 7.5.2 (Fourier Inverse auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) Die Abbildung

$$\mathfrak{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S),$$

definiert in (7.1), ist invertierbar und die Inverse $\mathfrak{F}^{-1}$ ist definiert durch

$$(\mathfrak{F}^{-1}f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) d\xi.$$

Bemerkung 7.5.3 Weil

$$(\mathfrak{F}^{-1}f)(x) = \overline{(\mathfrak{F}\overline{f})(x)},$$

hat die Inverse Fourier-Transformation ähnliche Eigenschaften wie die Fourier-Transformation.

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} g(\xi) (\mathfrak{F}f)(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{\xi \in \mathbb{R}} g(\xi) \int_{y \in \mathbb{R}} e^{-i2\pi y \xi} f(y) dy e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{\xi \in \mathbb{R}} g(\xi) \int_{y \in \mathbb{R}} e^{-i2\pi(y-x)\xi} f(y) dy d\xi \\ &= \int_{\xi \in \mathbb{R}} g(\xi) \int_{y \in \mathbb{R}} e^{-i2\pi y \xi} f(y+x) dy d\xi \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} g(\xi) e^{-i2\pi y \xi} d\xi f(y+x) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} (\mathfrak{F}g)(y) f(y+x) dy. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Ersetzt man $g(\xi)$ durch $g(\varepsilon\xi)$, dann folgt mit (7.8) und Lemma 7.2.2.4, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon\xi) (\mathfrak{F}f)(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} (\mathfrak{F}g(\varepsilon\cdot))(y) f(y+x) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} \varepsilon^{-1} (\mathfrak{F}g)(\varepsilon^{-1}y) f(y+x) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} (\mathfrak{F}g)(y) f(\varepsilon y+x) dy. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Wenn man $g(x) = e^{-\pi x^2}$ nimmt, dann hat man in Aufgabe 7.3 gezeigt, dass

$$(\mathfrak{F}g)(y) = e^{-\pi y^2}$$

und aus (7.9) folgt, wenn man $\varepsilon \downarrow 0$ gehen lässt, dass

$$\begin{aligned} g(0) \int_{\mathbb{R}} (\mathfrak{F}f)(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi &= f(x) \int_{y \in \mathbb{R}} (\mathfrak{F}g)(y) dy \\ &= f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy. \end{aligned}$$

Weil $g(0) = 1$ und $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1$, steht hier

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathfrak{F}f)(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = f(x). \quad (7.10)$$

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt $\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und Gleichung (7.10) gibt die Inverse. ■

Aus (7.8) folgt auch das nächste Ergebnis:

Lemma 7.5.4 (Parseval auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\|f\|_2 = \|\mathfrak{F}f\|_2 \quad \text{und} \quad \langle f, g \rangle = \langle \mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g \rangle.$$

Beweis. Für $x = 0$ ändert sich (7.8) in

$$\int_{\mathbb{R}} g(\xi) (\mathfrak{F}f)(\xi) d\xi = \int_{y \in \mathbb{R}} (\mathfrak{F}g)(y) f(y) dy$$

und ersetzt man f durch $\mathfrak{F}^{-1}\bar{f} = \overline{\mathfrak{F}f}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\xi)} g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) (\mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}\bar{f})(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mathfrak{F}g)(y) (\mathfrak{F}^{-1}\bar{f})(y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} (\mathfrak{F}g)(y) \overline{\mathfrak{F}f(y)} dy = \langle \mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g \rangle. \end{aligned}$$

Für die erste Gleichung nimmt man $f = g$. ■

Fourieranalysis

Kapitel 8

Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R})$



8.1 Temperierte Distributionen

Der Raum $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S)$ ist ein vollständiger metrischer Raum und als solcher auch ein topologischer Raum. Weil die Metrik durch Halbnormen $\|\cdot\|_{k,\ell}$ konstruiert wurde, ist $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_S)$ ein lokalkonvexer topologischer Raum.

Definition 8.1.1 Man nennt $A \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ offen, wenn es für jede Funktion $u \in A$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\{v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); d_S(u, v) < \varepsilon\} \subset A.$$

In solchen offenen Mengen kann man immer eine offene Menge B finden, die eine Schnittmenge ist von endlich vielen Halbnormkugeln

$$\begin{cases} B = \bigcap_{k,\ell < M} B_{k,\ell}(u, \varepsilon) & \text{mit} \\ B_{k,\ell}(u, \varepsilon) := \{v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); \|v - u\|_{k,\ell} < \varepsilon\}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Genauer formuliert wird das im nächsten Lemma:

Lemma 8.1.2 Sei $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\forall_{k,\ell < M_\varepsilon} \|u - v\|_{k,\ell} < \frac{1}{8}\varepsilon \implies d_S(u, v) < \varepsilon.$$

Beweis. Man rechnet für $M_\varepsilon > \ln(16/\varepsilon) / \ln(2)$

$$\begin{aligned} d_S(u, v) &= \sum_{k,\ell \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+\ell}} \frac{\|u - v\|_{k,\ell}}{1 + \|u - v\|_{k,\ell}} \\ &< \sum_{k,\ell < M_\varepsilon} \frac{1}{2^{k+\ell}} \frac{1}{8}\varepsilon + 2 \sum_{k \geq M_\varepsilon} \frac{1}{2^k} + 2 \sum_{\ell \geq M_\varepsilon} \frac{1}{2^\ell} \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + 8 \frac{1}{2^{M_\varepsilon}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Das B in (8.1) ist die Schnittmenge endlich vieler Halbnormkugeln. Die offenen Mengen in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sind somit festgelegt als Vereinigungen von solchen Schnittmengen endlich vieler Halbnormkugeln.

Definition 8.1.3 Sei V ein Vektorraum. Man nennt $(V, \mathcal{T})$ ein **Topologischer Vektorraum**, wenn die Klasse von Teilmengen $\mathcal{T}$ die folgenden Eigenschaften hat:

1. $\emptyset, V \in \mathcal{T}$;
2. wenn $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{T}$, dann gilt $B_1 \cap \dots \cap B_n \in \mathcal{T}$;
3. wenn $B_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$, dann gilt $\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}$.

In dem Fall nennt man $\mathcal{T}$ eine **Topologie** für V und die Mengen in $\mathcal{T}$ heißen offen.

Der Vektorraum $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{T})$ ist also ein Topologischer Vektorraum.

Definition 8.1.4 Eine Abbildung $A : (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, oder $A : (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$, nennt man stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge auch offen ist.

Aufgabe 8.1 Zeigen Sie: Für eine lineare Abbildung

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

reicht es um stetig zu sein, dass die Mengen

$$\{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); |A(u)| < \varepsilon\}$$

für alle $\varepsilon > 0$ offen sind.

Definition 8.1.5 Man schreibt $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ für die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $A : (\mathcal{S}(\mathbb{R}), \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Diese Menge $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ist auch ein Vektorraum und diesen Vektorraum nennt man die **Temperierten Distributionen**.

Distributionen kann man auffassen als eine Erweiterung von Funktionen:

Lemma 8.1.6 Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ wird die Abbildung $A_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$A_f(u) := \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx$$

eine temperierte Distribution.

Beweis. Weil $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, ist das Integral wohl-definiert. Die Abbildung A_f ist auch linear. Für die Stetigkeit von A_f bemerkt man, dass

$$|A_f(u)| \leq \|u\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|u\|_{0,0} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Bei linearen Abbildungen reicht es um die Stetigkeit nur in 0 zu beweisen. Sei $\varepsilon > 0$. Man sieht direkt, dass für $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit

$$\|v\|_{0,0} < \frac{\varepsilon}{1 + \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}$$

gilt, dass $|A_f(v)| < \varepsilon$. ■

Lemma 8.1.7 Für jede Funktion $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ wird die Abbildung $A_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$A_f(u) := \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx \quad (8.2)$$

eine temperierte Distribution.

Beweis. Weil $x \mapsto x^2 u(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, ist das Integral wohl-definiert, denn

$$\begin{aligned} |f(x)u(x)| &\leq \left| \frac{f(x)}{1+x^2} \right| (|u(x)| + |x^2 u(x)|) \\ &\leq \frac{1}{1+x^2} \|f\|_\infty (\|u\|_{0,0} + \|u\|_{2,0}) \end{aligned}$$

und

$$\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \right) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Auch diese Abbildung A_f ist linear. Für die Stetigkeit von A_f bemerkt man, dass

$$|A_f(u)| \leq \pi \|f\|_\infty (\|u\|_{0,0} + \|u\|_{2,0}).$$

Für $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit

$$\|v\|_{0,0} < \frac{\varepsilon/8}{1 + \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}} \quad \text{und} \quad \|v\|_{2,0} < \frac{\varepsilon/8}{1 + \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}$$

gilt dann, dass $|A_f(v)| < \varepsilon$. ■

Weil jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ zu schreiben ist als eine Summe von Funktionen aus $L^1(\mathbb{R})$ und $L^\infty(\mathbb{R})$, liefert auch eine solche Funktion mittels A_f eine temperierte Distribution. Übrigens ist eine passende Zerlegung von $f \in L^2(\mathbb{R})$ zum Beispiel

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |f(x)| > 1, \\ f(x) & \text{wenn } |f(x)| \leq 1, \end{cases}$$

und $f_1(x) = f(x) - f_\infty(x)$. Es gilt $\|f_\infty\|_\infty \leq 1$ und

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)| dx = \int_{|f(x)| \geq 1} |f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

Lemma 8.1.8 Die Abbildung $\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\delta(u) = u(0)$ ist eine temperierte Distribution.

Bemerkung 8.1.9 Man nennt δ die **Dirac- δ -Distribution**.

Beweis. Die Aussage folgt aus

$$|\delta(u)| = |u(0)| \leq \|u\|_\infty = \|u\|_{0,0}.$$

■

Lemma 8.1.10 Sei $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dann gilt:

1. $\tilde{A}$, definiert durch $\tilde{A}(u) := A(u')$, ist in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. $\check{A}$, definiert durch $\check{A}(u) := A(x \mapsto xu(x))$, ist in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Aufgabe 8.2 Beweisen Sie Lemma 8.1.10.

Lemma 8.1.11 Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Die Abbildung

$$u \mapsto (\mathfrak{F}u)(\xi) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C},$$

mit $\mathfrak{F}$ die Fourier-Transformation, ist eine temperierte Distribution.

Aufgabe 8.3 Beweisen Sie Lemma 8.1.11.

8.2 Eigenschaften von Distributionen

Temperierte Distribution sind stetige lineare Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}$. Eine spezielle Klasse von Distributionen ist die Folgende:

Definition 8.2.1 Wenn für $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ eine Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ existiert mit $|f(x)| \leq C (1 + |x|^M)$ für irgendwelche $C, M \in \mathbb{N}$, und

$$A(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx$$

dann nennt man A eine **reguläre Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$** .

Bemerkung 8.2.2 Dies ist eine Distribution, weil die Abbildung linear ist, und auch stetig, weil

$$\begin{aligned} |A(u)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1 + |x|^M)} \int (1 + |x|^M) (1 + x^2) \frac{|u(x)|}{1 + x^2} dx \\ &\leq C \left(\|u\|_{0,0} + \|u\|_{M,0} + \|u\|_{2,0} + \|u\|_{M+2,0} \right) \pi. \end{aligned}$$

Für eine solche Distribution schreiben wir

$$A_f(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x)dx.$$

Für reguläre Distribution will man, dass diese sich benehmen wie die zugrundeliegende Funktion. Zum Beispiel gilt, dass wenn f differenzierbar ist und eine ähnliche Abschätzung erfüllt, dass

$$A_{f'}(u) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)u(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x)u'(x)dx = -A_f(u).$$

Definition 8.2.3 Sei $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dann definiert man die Ableitung $A' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ durch

$$A'(u) = -A(u').$$

Bemerkung 8.2.4 Weil aus $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ folgt, dass $u' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist auch A' eine Distribution.

8.3 Fourier-Transformation in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Definition 8.3.1 Man definiert $\mathfrak{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ durch

$$(\mathfrak{F}A)(u) := A(\mathfrak{F}u) \text{ für } A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ und } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Man kann die Fourier-Transformation definieren, wie man möchte, aber sinnvoll ist so eine Definition nur, wenn es die bestehende Definition erweitert. Wir haben $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ definiert und bemerkt, weil $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, dass $\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ dann auch definiert. Es gilt sogar, dass $\mathfrak{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und sogar, dass es für die Abbildung

$$\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

eine Inverse gibt, nämlich

$$\mathfrak{F}^{-1} = \overline{\mathfrak{F}}.$$

Um zu zeigen, dass die Erweiterung von $\mathfrak{F}$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ eine Erweiterung ist, müssen wir zeigen, dass

$$\mathfrak{F}(A_f) = A_{(\mathfrak{F}f)} \text{ für } f \in L^1(\mathbb{R}). \quad (8.3)$$

Das stimmt tatsächlich, denn für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}(A_f))(u) &= (A_f)(\mathfrak{F}u) = \int_{\xi \in \mathbb{R}} f(\xi)(\mathfrak{F}u)(\xi) d\xi \\ &= \int_{\xi \in \mathbb{R}} f(\xi) \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-i2\pi x\xi} u(x) dx d\xi \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}} u(x) \int_{\xi \in \mathbb{R}} e^{-i2\pi x\xi} f(\xi) d\xi dx \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}} u(x) (\mathfrak{F}f)(x) dx = A_{\mathfrak{F}f}(u). \end{aligned}$$

Weil $\mathfrak{F}$ und A beide linear sind, ist auch $\mathfrak{F}A$ linear und

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(c_1 A + c_2 B)(u) &= (c_1 A + c_2 B)(\mathfrak{F}u) \\ &= c_1 A(\mathfrak{F}u) + c_2 B(\mathfrak{F}u) = c_1 (\mathfrak{F}A)(u) + c_2 (\mathfrak{F}B)(u) \end{aligned}$$

zeigt, dass $\mathfrak{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ linear ist.

Um zu zeigen, dass $\mathfrak{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung ist, müssen wir erst Stetigkeit definieren. Wir nehmen das Folgende:

Definition 8.3.2 Eine Abbildung $\mathcal{A} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ nennen wir stetig, wenn für $F_n, F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} F_n(u) &\rightarrow F(u) \text{ für alle } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ impliziert} \\ \mathcal{A}(F_n)(u) &\rightarrow \mathcal{A}(F)(u) \text{ für alle } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Bemerkung 8.3.3 Die Konvergenz bei $F_n(u) \rightarrow F(u)$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(u) - F(u)| = 0$$

und ähnlich für $\mathcal{A}(F_n)(u) \rightarrow \mathcal{A}(F)(u)$. Es ist eine grobe Konvergenz, die nichts Gleichmäßiges verlangt und die man

vergleichen kann mit der punktweisen Konvergenz bei Funktionenfolgen. Diese Konvergenz hat auch einen Namen: die **Schwach*-Konvergenz**.

Die offenen Mengen in dieser Topologie bekommt man, durch endliche Schnittmengen und beliebige Vereinigungen zu nehmen, anfangend bei den Basiskugeln

$$B_u(F, \varepsilon) = \{G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); |G(u) - F(u)| < \varepsilon\},$$

mit $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$.

Lemma 8.3.4 Die Abbildung $\mathfrak{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ in Definition 8.3.1 ist stetig im Sinne von Definition 8.3.2.

Beweis. Sei $F_n, F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ derart, dass $F_n(u) \rightarrow F(u)$ für alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\mathfrak{F}(u) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und

$$|\mathfrak{F}F_n(u) - \mathfrak{F}F(u)| = |F_n(\mathfrak{F}u) - F(\mathfrak{F}u)| \rightarrow 0.$$

■

Weil $\mathfrak{F}^{-1}(u) = \overline{\mathfrak{F}(\overline{u})}$, haben $\mathfrak{F}^{-1}$ und $\mathfrak{F}$ ähnliche Eigenschaften und man kann auch $\mathfrak{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ähnlich definieren durch

$$(\mathfrak{F}^{-1}A)(u) = A(\mathfrak{F}^{-1}u).$$

Auch $\mathfrak{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ist eine stetige, lineare Abbildung. Weil

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}A))(u) &= (\mathfrak{F}^{-1}A)(\mathfrak{F}u) = A(\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}u) = A(u), \\ (\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}A))(u) &= (\mathfrak{F}A)(\mathfrak{F}^{-1}u) = A(\mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}u) = A(u) \end{aligned}$$

ist dieses $\mathfrak{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ die Inverse von $\mathfrak{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Das nächste Theorem zeigt, dass diese Erweiterung von $\mathfrak{F}$ aus Definition 8.3.1 schöne Eigenschaften hat, wenn man sie einschränkt als Abbildung auf $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen.

Theorem 8.3.5 (Plancherel¹) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und sei $\mathfrak{F}$ definiert auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ wie in (8.3.1).

1. Dann gibt es genau eine Funktion $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ mit für A_f , $A_{\hat{f}}$ als in (8.2):

$$\mathfrak{F}(A_f) = A_{\hat{f}}.$$

Mit (8.3) heißt das $\mathfrak{F}f = \hat{f}$.

2. Außerdem gilt $\|\mathfrak{F}f\|_2 = \|f\|_2$.

Die Abbildungen $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ haben ähnliche Eigenschaften. Beide Abbildungen sind stetig. Weil $\mathfrak{F}^{-1}$ die Inverse ist von $\mathfrak{F}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, ist $\mathfrak{F}^{-1}$ auch der Inverse von $\mathfrak{F}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ und umgekehrt. Mit der zweiten Eigenschaft vom Theorem findet man sogar:

Korollar 8.3.6 $\mathfrak{F} : (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ ist eine Isometrie.

Bemerkung 8.3.7 Die Funktionen f und $\mathfrak{F}f = \hat{f}$ liegen in $L^2(\mathbb{R})$, aber das heißt noch nicht, dass man $\mathfrak{F}f$ via (7.1) berechnen kann. Mit Lebesgue-Integrierbarkeit geht es jedenfalls nicht direkt für $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.

Im nächsten Beweis brauchen wir das folgende Ergebnis, das wir hier nicht beweisen werden:

¹Michel Plancherel, 1885-1967

Theorem 8.3.8 (Der Repräsentationssatz von Riesz²) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und sei $A : H \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige lineare Abbildung. Dann gibt es $u \in H$ derart, dass

$$A(v) = \langle u, v \rangle \text{ für alle } v \in H.$$

Beweis von Theorem 8.3.5. Mit Cauchy-Schwarz findet man für alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}(A_f)(u)| &= |A_f(\mathfrak{F}u)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)(\mathfrak{F}u)(x) dx \right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |(\mathfrak{F}u)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_2 \|\mathfrak{F}u\|_2 = \|f\|_2 \|u\|_2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Der letzte Schritt folgt aus Lemma 7.5.4 (Parseval). Weil³ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht liegt in $L^2(\mathbb{R})$, kann man $u \in L^2(\mathbb{R})$ approximieren mit $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ -Norm und so $\mathfrak{F}(A_f)$ für $u \in L^2(\mathbb{R})$ erweitern: Wenn $\|u_n - u\|_2 \rightarrow 0$ setzt man

$$\mathfrak{F}(A_f)(u) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{F}(A_f)(u_n).$$

Dann gilt (8.4) auch für $u \in L^2(\mathbb{R})$.

²Frigyes Riesz, 1880-1956

³Sei $u \in L^2(\mathbb{R})$, dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon > 0$ derart, dass $\|u - 1_{[-M_\varepsilon, M_\varepsilon]}u\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$. Die Funktion $v := 1_{[-M_\varepsilon, M_\varepsilon]}u \in L^2(\mathbb{R})$ hat ihren Träger in $[-M_\varepsilon, M_\varepsilon]$.

Mit dem Friedrichs'schen Glätter $\{\varphi_\delta\}_{\delta>0}$ gibt es $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass $\|v - \varphi_{\delta_\varepsilon} * v\|_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$. Die Funktion $w := \varphi_{\delta_\varepsilon} * v \in C^\infty(\mathbb{R})$ hat ihren Träger in $[-M_\varepsilon - \delta_\varepsilon, M_\varepsilon + \delta_\varepsilon]$ und liegt dann auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es gilt $\|u - w\|_2 < \varepsilon$.

Dies bedeutet, dass

$$\mathfrak{F}(A_f) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

eine beschränkte, lineare Abbildung ist und daher auch stetig ist. Mit dem Repräsentationssatz von Riesz gibt es genau eine Funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ derart, dass

$$\mathfrak{F}(A_f)(u) = \langle g, u \rangle \text{ für alle } u \in L^2(\mathbb{R}).$$

Schreiben wir $\hat{f} := \bar{g}$, dann folgt

$$\mathfrak{F}(A_f)(u) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)u(x)dx = A_{\hat{f}}(u). \quad (8.5)$$

Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Aus (8.4) und (8.5) folgt für $u = g$, dass

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx \leq \|f\|_2 \|g\|_2 = \|f\|_2 \|\hat{f}\|_2$$

und $\|\mathfrak{F}f\|_2 \leq \|f\|_2$. Ähnliche Resultate gibt es für $\mathfrak{F}^{-1}f$, also

$$\|f\|_2 = \|\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}f\|_2 \leq \|\mathfrak{F}f\|_2,$$

und man findet $\|f\|_2 = \|\mathfrak{F}f\|_2$. ■

Aufgabe 8.4 Sei $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ derart, dass $|A(u)| \leq c\|u\|_2$. Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass man A erweitern kann zu einer stetigen, linearen Abbildung $\tilde{A}$ von $L^2(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}$ mit den folgenden Schritten:

1. Wenn es $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $w \in L^2(\mathbb{R})$ gibt mit

$$\|u_n - w\|_2 \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

dann existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} A(u_n)$.

2. Wenn auch für $v_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, dass $\|v_n - w\|_2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(v_n).$$

3. So ist $\tilde{A}(w) := \lim_{n \rightarrow \infty} A(u_n)$ wohl-definiert und

$$\tilde{A} : (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

ist eine stetige, lineare Abbildung.

8.4 Eine Übersicht

Das Ergebnis im Theorem von Plancherel sagt, dass die Fourier-Transformation als Abbildung von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$ eine Isometrie ist. Um so weit zu kommen, gab es einen beachtlichen Weg, grob dargestellt in Abbildung 8.1.

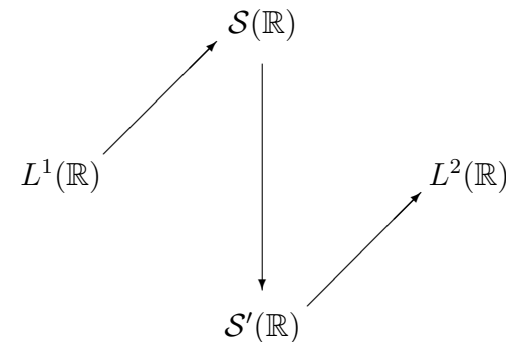


Abbildung 8.1: Der Definitionsweg von $\mathfrak{F}$

1. Die Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R})$ -Funktionen werden direkt als Integral definiert. Für $u \in L^1(\mathbb{R})$ setzt man:

$$(\mathfrak{F}u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} u(x) dx. \quad (8.6)$$

Weil $|e^{-2\pi i x y} u(x)| = |u(x)|$ und für eine Funktion $u \in L^2(\mathbb{R})$ das Lebesgue-Integral von $|u(x)|$ über $\mathbb{R}$, also die rechte Seite in (8.6), nicht wohl-definiert ist, musste etwas anderes gemacht werden.

2. Der Funktionenraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ wurde eingeführt. Weil $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, kann man auch hier die Fourier-Transformation mit (8.6) definieren. Hier konnte man zeigen, dass $\mathfrak{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und sogar, dass $\mathfrak{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Es gab sogar eine Inverse $\mathfrak{F}^{-1}$, die man mittels eines ähnlichen Integrals definieren konnte:

$$(\mathfrak{F}^{-1}u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} u(x) dx. \quad (8.7)$$

Eine Einschränkung von $L^1(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ könnte auf den ersten Blick kontraproduktiv erscheinen, war es aber nicht.

3. Schöne Eigenschaften von $\mathfrak{F}$ auf dem vielleicht etwas unschönen Fréchetraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ erlaubten es via Dualität $\mathfrak{F}$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ zu definieren. Man konnte diese Räume durch Einbettungen vergleichen:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Hier bedeutet $A \hookrightarrow B$, dass nicht nur als Menge $A \subset B$ gilt, sondern auch die zugeordneten Topologien sich gut

verhalten. Sie lockern sich von links nach rechts. Ähnlich hat man

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Die Fourier-Transformation, die auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ erweitert wurde, konnte man einschränken auf $L^2(\mathbb{R})$ und wurde da sogar eine Isometrie. Obwohl für $f \in L^2(\mathbb{R})$ auch $\mathfrak{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt, ist $\mathfrak{F}f$ jedoch nicht als Integral definiert.

Man kann $\mathfrak{F}f$ für $f \in L^2(\mathbb{R})$ jedoch schon mit Integralen approximieren und das werden wir auch im nächsten Abschnitt sehen.

8.5 Eigenschaften

Wir haben Rechenregeln für $\mathfrak{F}$ auf $L^1(\mathbb{R})$ -Funktionen hergeleitet, die auch gültig sind auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Weil $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht liegt in $L^2(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ stetig ist, gelten diese Rechenregeln auch für $L^2(\mathbb{R})$. Das heißt, Lemma 7.2.2 bleibt gültig, wenn man überall $L^1(\mathbb{R})$ durch $L^2(\mathbb{R})$ ersetzt.

Lemma 8.5.1 Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und definiere

$$\hat{f}_M(\xi) := \int_{|x| < M} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx. \quad (8.8)$$

Dann gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|\mathfrak{F}f - \hat{f}_M\|_2 = 0.$$

Bemerkung 8.5.2 Weil

$$\begin{aligned} \|1_{[-M,M]} e^{-2\pi i x \xi} f\|_1 &= \int_{|x| < M} |f(x)| dx \\ &\leq \sqrt{2M} \left(\int_{|x| < M} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{2M} \|f\|_2 \end{aligned}$$

ist das Integral in (8.8) wohl-definiert.

Beweis. Weil $f \in L^2(\mathbb{R})$, gilt

$$\|1_{[-M,M]} f - f\|_2 \rightarrow 0 \text{ für } M \rightarrow \infty$$

und folgt aus Theorem 8.3.5, dass

$$\|\mathfrak{F}(1_{[-M,M]} f - f)\|_2 = \|1_{[-M,M]} f - f\|_2$$

gilt auch

$$\|\hat{f}_M - \mathfrak{F}f\|_2 \rightarrow 0 \text{ für } M \rightarrow \infty.$$

■

Aufgabe 8.5 Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und sei f_ε definiert durch

$$f_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x^2} f(x).$$

1. Zeigen Sie, dass $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Weil $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$, ist $\mathfrak{F}f_\varepsilon$ als Integral definiert.

2. Zeigen Sie, dass $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\mathfrak{F}f_\varepsilon - \mathfrak{F}f\|_2 = 0$.

Lemma 8.5.3 Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\langle \mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g \rangle = \langle f, g \rangle.$$

Beweis. Theorem 8.3.5 gibt $\|f\|_2 = \|\mathfrak{F}f\|_2$. Die Aussage folgt aus der Polarisationsformel von Lemma 6.2.3. ■

8.6 Eigenfunktionen von $\mathfrak{F}$

Definition 8.6.1 Sei $A : V \rightarrow V$ ein linearer Operator auf dem Vektorraum V . Wenn $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ derart sind, dass

$$Av = \lambda v \text{ und } v \neq 0,$$

dann nennt man v eine **Eigenfunktion** von A mit dem **Eigenwert** λ .

Eine Eigenfunktion von $\mathfrak{F}$ haben wir schon gesehen. Für $f(x) = e^{-\pi x^2}$ findet man

$$(\mathfrak{F}f)(\xi) = f(\xi) \text{ für } \xi \in \mathbb{R}. \quad (8.9)$$

Bemerkung 8.6.2 Man kann dies übrigens auch ohne Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$ beweisen, wenn man bemerkt, dass f die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$f'(x) = -2\pi x f(x). \quad (8.10)$$

Wegen Lemma 7.2.2.5 gilt

$$\mathfrak{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi (\mathfrak{F}f)(\xi)$$

und wegen .6, dass

$$\mathfrak{F}(x \mapsto x f(x))(\xi) = \frac{1}{-2\pi i} (\mathfrak{F}f)'(\xi).$$

Man findet, wenn man die letzten drei Gleichungen kombiniert

$$\begin{aligned} 2\pi i \xi (\mathfrak{F}f)(\xi) &= \mathfrak{F}(f')(\xi) \\ &= \mathfrak{F}(x \mapsto -2\pi x f(x))(\xi) = -i (\mathfrak{F}f)'(\xi), \end{aligned}$$

also

$$(\mathfrak{F}f)'(\xi) = -2\pi\xi (\mathfrak{F}f)(\xi). \quad (8.11)$$

Das heißt, dass $(\mathfrak{F}f)$ und f die gleiche Differentialgleichung (8.10), (8.11) erfüllen. Bei einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung bedeutet es, dass für irgendeine Konstante c gilt

$$(\mathfrak{F}f)(x) = cf(x).$$

Weil $f(0) = 1$ und $(\mathfrak{F}f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, folgt $c = 1$.

Wenn man weitere Eigenfunktionen von $\mathfrak{F}$ sucht, dann soll man bemerken, dass nur ein paar Eigenwerte möglich sind. Weil $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^{-1}$ sich nur durch ein Minuszeichen unterscheiden, findet man

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{F}u)(x) = u(-x).$$

Dies bedeutet auch, dass $(\mathfrak{F}^4u) = u$ und wenn man einen Eigenwert λ von $\mathfrak{F}$ sucht, dass $\lambda^4 = 1$. Es gibt nur 4 Möglichkeiten

$$\lambda \in \{1, i, -1, -i\}.$$

Wie finden wir, wenn es sie überhaupt gibt, zugehörige Eigenfunktionen?

Es stellt sich heraus, dass man weitere Eigenfunktionen finden kann mit Hilfe von den Operatoren $\text{Op}_{\pm} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definiert durch

$$(\text{Op}_{\pm}u)(x) := \left(2\pi x \mp \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x). \quad (8.12)$$

Lemma 8.6.3 Sei $f_0(x) = e^{-\pi x^2}$ und definiere für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ durch

$$f_n := (\text{Op}_+)^n f_0. \quad (8.13)$$

Die Funktionen $\mathfrak{F}f_n$ erfüllen $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und

$$\mathfrak{F}f_n = (-i)^n f_n,$$

sind also Eigenfunktionen von $\mathfrak{F}$ mit Eigenwert i^n .

Beweis. Die Funktion f_0 ist eine Eigenfunktion in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit Eigenwert $\lambda = 1$. Etwas schlampig geschrieben

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2})(\xi) = e^{-\pi \xi^2}.$$

Weiter kann man bemerken, dass die Operatoren $\text{Op}_{\pm}$ mit Lemma 7.2.2.5 und .6 etwas Besonderes machen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\text{Op}_{\pm}(f))(\xi) &= \mathfrak{F}\left(\left(2\pi x \mp \frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)\right)(\xi) \\ &= \mathfrak{F}(2\pi x f(x))(\xi) \mp \mathfrak{F}(f')(\xi) \\ &= i(\mathfrak{F}f)'(\xi) \mp 2\pi i\xi (\mathfrak{F}f)(\xi) \\ &= \mp i\left(2\pi\xi \mp \frac{\partial}{\partial \xi}\right)(\mathfrak{F}f)(\xi) = \mp i\text{Op}_{\pm}(\mathfrak{F}f)(\xi). \end{aligned}$$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}f)(\xi) &= \lambda f(\xi) \implies \\ \mathfrak{F}(\text{Op}_{\pm}(f))(\xi) &= \mp i\lambda \text{Op}_{\pm}(f)(\xi). \quad (8.14) \end{aligned}$$

Setzen wir $f = f_0$ ein, dann ist $\text{Op}_{\pm}(f_0)$ entweder eine Eigenfunktion von $\mathfrak{F}$ mit Eigenwert $\mp i$, oder identisch 0. Mit Induktion sieht man, dass

$$\text{Op}_{\pm}^n(f_0)(x) = p_{\pm,n}(x)e^{-\pi x^2}$$

mit $p_{\pm,n}$ einem Polynom von Grad höchstens n . Es folgt damit, dass $\text{Op}_{\pm}^n(f_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Weil

$$\text{Op}_-(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = ce^{-\pi x^2} = cf_0(x)$$

wird $\text{Op}_- f_0$ trivial, und weil

$$\text{Op}_+(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = ce^{\pi x^2} \text{ mit } x \mapsto e^{\pi x^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

wird $(\text{Op}_+)^n f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nicht trivial werden für jedes $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt wegen (8.14), dass

$$\mathfrak{F}\left(\text{Op}_+^n\left(e^{-\pi x^2}\right)\right)(\xi) = (-i)^n \text{Op}_+^n\left(\mathfrak{F}\left(e^{-\pi x^2}\right)\right)(\xi)$$

und das heißt $f_n(x) := \text{Op}_+^n(e^{-\pi x^2})$ ist eine Eigenfunktion mit Eigenwert $(-i)^n$. ■

Mit $f_n(x) := \text{Op}_+^n(e^{-\pi x^2})$ finden wir 4 Eigenräume für $\mathfrak{F}$:

- $\mathfrak{F}(v) = v$ für $v \in E_1 := \text{Span}[\{f_{4n}\}_{n \in \mathbb{N}}]$;
- $\mathfrak{F}(v) = iv$ für $v \in E_i := \text{Span}[\{f_{4n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}]$;
- $\mathfrak{F}(v) = -v$ für $v \in E_{-1} := \text{Span}[\{f_{4n+2}\}_{n \in \mathbb{N}}]$;
- $\mathfrak{F}(v) = -iv$ für $v \in E_{-i} := \text{Span}[\{f_{4n+3}\}_{n \in \mathbb{N}}]$.

Für die Funktionen f_n gilt, wie schon bemerkt, dass

$$f_n(x) = p_n(x)e^{-\pi x^2}$$

für p_n ein Polynom von Grad n . Wir haben die ersten f_n hier gelistet:

$f_0(x) =$	$e^{-\pi x^2}$
$f_1(x) =$	$4\pi x e^{-\pi x^2}$
$f_2(x) =$	$4\pi(4\pi x^2 - 1)e^{-\pi x^2}$
$f_3(x) =$	$16\pi^2 x(4\pi x^2 - 3)e^{-\pi x^2}$
$f_4(x) =$	$16\pi^2(16\pi^2 x^4 - 24\pi x^2 + 3)e^{-\pi x^2}$
$f_5(x) =$	$64\pi^3 x(16\pi^2 x^4 - 40\pi x^2 + 15)e^{-\pi x^2}$

Für die alternative Fourier-Transformation

$$\tilde{\mathfrak{F}}u(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\xi x} u(x) dx$$

wären die folgenden skalierten Eigenfunktionen passend:

$$\tilde{f}_n(x) := \left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n e^{-x^2/2} \text{ für } n \in \mathbb{N}. \quad (8.15)$$

Aufgabe 8.6 Zeigen Sie die letzte Behauptung.

Die normalisierte $\tilde{f}_n$ aus (8.15) werden die **Hermite-Funktionen** genannt. Die polynomialen Terme vor dem Exponentialterm in $\tilde{f}_n$ nennt man die **Hermite-Polynome**. Die Hermite-Polynome sind also definiert durch

$$h_n(x) := e^{x^2/2} \left(x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n e^{-x^2/2}.$$

Aufgabe 8.7 Rodrigues⁴ definierte

$$H_n(x) := e^{x^2} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n e^{-x^2}.$$

Gibt es eine Verbindung zwischen h_n und H_n ?

Lemma 8.6.4 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das innere Produkt auf $L^2(\mathbb{R})$. Die Operatoren $\text{Op}_\pm : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ aus (8.12) haben die folgenden Eigenschaften:

1. $\langle \text{Op}_\pm u, v \rangle = \langle u, \text{Op}_\mp v \rangle$ für $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. Der **Kommutator**⁵ von Op_- und Op_+ erfüllt

$$[\text{Op}_-, \text{Op}_+] = 4\pi.$$

⁴Benjamin Olinde Rodrigues, 1795-1851

⁵Der Kommutator zweier Operatoren $A, B : V \rightarrow V$ ist der Operator $AB - BA : V \rightarrow V$.

Beweis. Es gilt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}\langle \text{Op}_\pm u, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\left(2\pi x \mp \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)} v(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\left(2\pi x \mp \frac{\partial}{\partial x}\right) \overline{u(x)} \right) v(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{u(x)} \left(2\pi x \pm \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) dx = \langle u, \text{Op}_\mp v \rangle.\end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}& ([\text{Op}_-, \text{Op}_+] u)(x) \\ &= (\text{Op}_- \text{Op}_+ u)(x) - (\text{Op}_+ \text{Op}_- u)(x) \\ &= \left(\left(2\pi x + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(2\pi x - \frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(2\pi x - \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(2\pi x + \frac{\partial}{\partial x}\right) \right) u(x) \\ &= \left(0 + \left(\frac{\partial}{\partial x} 2\pi x\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial x} 2\pi x\right)\right) u(x) \\ &= 4\pi u(x)\end{aligned}$$

und dies beweist den zweiten Punkt. $\blacksquare$

Lemma 8.6.5 Für $m, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\langle \text{Op}_+^m e^{-\pi x^2}, \text{Op}_+^k e^{-\pi x^2} \right\rangle = \frac{(4\pi)^k k!}{\sqrt{2}} \delta_{m,k}.$$

Beweis. Wegen $[\text{Op}_-, \text{Op}_+] = 4\pi$ aus Lemma 8.6.4, folgt

$$\begin{aligned}[\text{Op}_-, \text{Op}_+^n] &= \text{Op}_- \text{Op}_+^n - \text{Op}_+^n \text{Op}_- \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \text{Op}_+^k [\text{Op}_-, \text{Op}_+] \text{Op}_+^{n-k-1} = 4\pi n \text{Op}_+^{n-1}.\end{aligned}$$

Weil $\text{Op}_- f_0 = 0$ findet man daher

$$\text{Op}_- \text{Op}_+^n f_0 = [\text{Op}_-, \text{Op}_+^n] f_0 = 4\pi n \text{Op}_+^{n-1} f_0.$$

Für $m \geq k$ folgt dann wegen der ersten Aussage in Lemma 8.6.4, dass

$$\begin{aligned}\langle \text{Op}_+^m f_0, \text{Op}_+^k f_0 \rangle &= \langle \text{Op}_+^{m-1} f_0, \text{Op}_- \text{Op}_+^k f_0 \rangle \\ &= 4\pi k \langle \text{Op}_+^{m-1} f_0, \text{Op}_+^{k-1} f_0 \rangle = (4\pi)^k k! \langle \text{Op}_+^{m-k} f_0, f_0 \rangle.\end{aligned}$$

Für $m = k$ findet man

$$\langle \text{Op}_+^k f_0, \text{Op}_+^k f_0 \rangle = (4\pi)^k k! \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2} dx = \frac{(4\pi)^k k!}{\sqrt{2}}.$$

Für $m > k$ geht man einen Schritt weiter und folgt

$$\langle \text{Op}_+^{m-k} f_0, f_0 \rangle = \langle \text{Op}_+^{m-k-1} f_0, \text{Op}_- f_0 \rangle = 0.$$

Für $m < k$ bemerkt man, dass $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$. $\blacksquare$

Proposition 8.6.6 Sei $\psi_0(x) = \sqrt[4]{2} e^{-\pi x^2}$ und

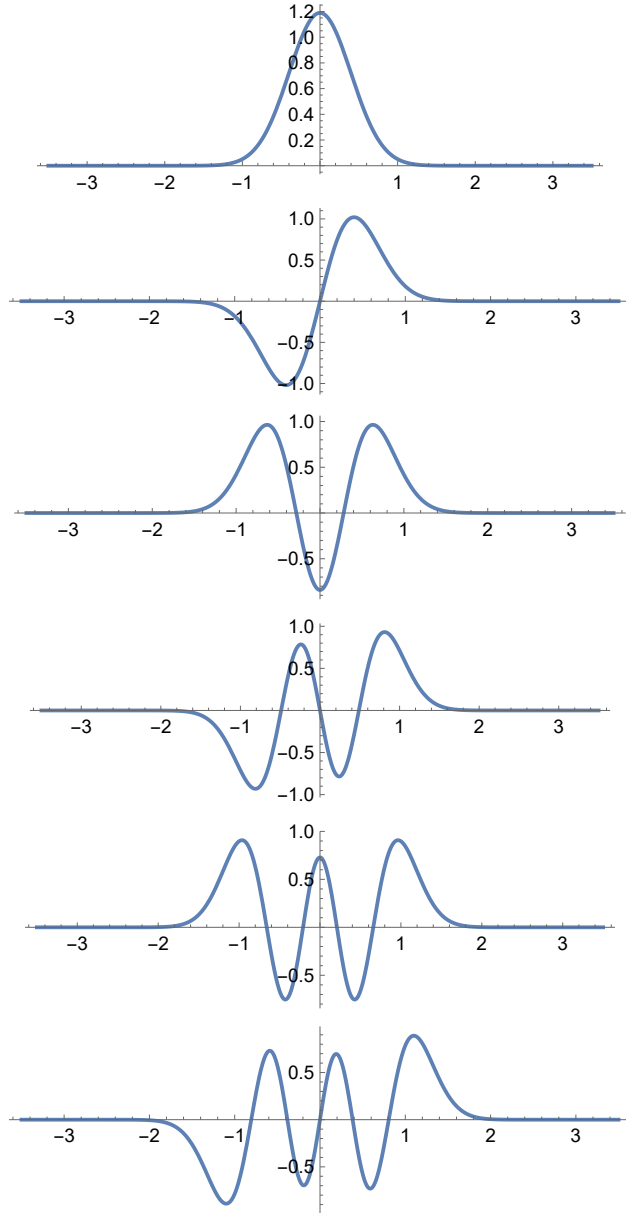
$$\psi_n(x) := \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n \sqrt{n!}} (\text{Op}_+^n \psi_0)(x). \quad (8.16)$$

Dann ist $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 8.6.5. $\blacksquare$

Erstaunlicherweise kann man noch etwas mehr sagen:

Theorem 8.6.7 Das System $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus (8.16) ist ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$.

Abbildung 8.2: Skizzen zu ψ_0 bis ψ_5

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\langle \psi_n, f \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir zeigen können, dass dies $f = 0$ impliziert, dann gilt

$$\overline{\text{Span}[\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}]}^{\|\cdot\|_2} = L^2(\mathbb{R})$$

und wir sind fertig. Für den Beweis brauchen wir Kenntnisse von komplexen Funktionen und betrachten $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(\zeta) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \zeta - \pi x^2} \overline{f(x)} dx.$$

Weil $|e^{-2\pi i x \zeta - \pi x^2}| \leq e^{2\pi |\text{Im} \zeta| x - \pi x^2}$ ist das Integral wohldefiniert. Für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ gilt

$$F'(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i x e^{-2\pi i x \zeta - \pi x^2} \overline{f(x)} dx$$

und auch dieses Integral ist wohl-definiert. Eine komplex-differenzierbare Funktion auf $\mathbb{C}$ ist analytisch. Alle Ableitungen existieren in für $\zeta = 0$ gilt

$$F^{(n)}(0) = (-2\pi i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-\pi x^2} \overline{f(x)} dx.$$

Weil die Funktion $x \mapsto x^n e^{-\pi x^2}$ in $\text{Span}[\{\psi_0, \dots, \psi_n\}]$ liegt und $\langle \psi_k, f \rangle = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, finden wir, dass

$$F^{(n)}(0) = 0.$$

Eine analytische Funktion, bei der an einer Stelle alle Ableitungen gleich 0 sind, muss selber 0 sein und das zeigt $F(\zeta) = 0$. Weil

$$0 = F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} e^{-\pi x^2} \overline{f(x)} dx = \mathfrak{F}(e^{-\pi x^2} \overline{f})(\xi),$$

und $(x \mapsto e^{-\pi x^2} \overline{f(x)}) \in L^2(\mathbb{R})$, folgt

$$e^{-\pi x^2} \overline{f(x)} = (\mathfrak{F}^{-1}0)(x) = 0 \text{ f.ü.}$$

Dann gilt $f = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}$ und das heißt, dass $f = 0$ in $L^2(\mathbb{R})$. ■

Korollar 8.6.8 Für $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathfrak{F}f = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-i)^n \langle \psi_n, f \rangle \psi_n.$$

Bemerkung 8.6.9 Wiener⁶ hat dieses Ergebnis benutzt, um die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ zu definieren. Siehe [14].

Aufgabe 8.8 Wir hatten Glück, dass die Hermite-Funktionen orthogonal waren. Wenn das nicht so wäre, hätte man wie folgt orthonormalisieren können.

1. Zeigen Sie, wenn $\mathfrak{F}u = \lambda_u u$ und $\mathfrak{F}v = \lambda_v v$ mit $\lambda_u \neq \lambda_v$, dass $\langle u, v \rangle = 0$.
2. Wenn es mehrere (höchstens abzählbar viele) Eigenfunktionen mit gleichem Eigenwert gibt, also sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\mathfrak{F}u_n = \lambda u_n$ mit $u_n \neq 0$ für $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und $\{u_n\}$ unabhängig, dann kann man ein Orthonormalsystem $\{\tilde{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für jeden Eigenraum bekommen durch das **Gram⁷-Schmidt⁸ Orthonormierungsverfahren**. Zeigen Sie, dass die Vereinigungen dieser Orthonormalsysteme wieder ein Orthonormalsystem liefert.

⁶Norbert Wiener, 1894-1964

⁷Jorgen Pederson Gram, 1850-1916

⁸Erhard Schmidt, 1876-1959

Algorithmus 1 (Gram-Schmidt Orthonormierungsverfahren)

Nehme $I = \{0, \dots, N\}$ oder $I = \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{S} := \{u_n\}_{n \in I}$ eine Teilmenge aus dem Inner-Produkt Raum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit der üblichen Norm $\|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2}$.

0. Wenn $u_0 \neq 0$, dann setze $\tilde{u}_0 := \|u_0\|^{-1} u_0$.
Wenn $u_0 = 0$, lösche u_0 aus $\mathcal{S}$ und wiederhole Schritt 0.

1. Wenn $\hat{u}_1 := u_1 - \langle u_1, \tilde{u}_0 \rangle \tilde{u}_0 \neq 0$, dann setze
 $\tilde{u}_1 := \|\hat{u}_1\|^{-1} \hat{u}_1$.

Wenn $\hat{u}_1 = 0$, lösche u_1 aus $\mathcal{S}$ und wiederhole Schritt 1.

2. Wenn $\hat{u}_2 := u_2 - \langle u_2, \tilde{u}_0 \rangle \tilde{u}_0 - \langle u_2, \tilde{u}_1 \rangle \tilde{u}_1 \neq 0$, dann setze
 $\tilde{u}_2 := \|\hat{u}_2\|^{-1} \hat{u}_2$.

Wenn $\hat{u}_2 = 0$, lösche u_2 aus $\mathcal{S}$ und wiederhole Schritt 2.

· · ·

- n. Wenn $\hat{u}_n := u_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle u_n, \tilde{u}_k \rangle \tilde{u}_k \neq 0$, dann setze
 $\tilde{u}_n := \|\hat{u}_n\|^{-1} \hat{u}_n$

Wenn $\hat{u}_n = 0$, lösche u_n aus $\mathcal{S}$ und wiederhole Schritt n.

· · ·

Schreibe $\{\tilde{u}_n\}_{n \in \tilde{I}}$ für das neu konstruierte System. Dann gilt:

- $\{\tilde{u}_n\}_{n \in \tilde{I}}$ ist ein Orthonormalsystem.
- Sei $k \in I$. Wenn u eine Linearkombination von $\{u_n\}_{n=0}^k$ ist, dann gibt es $\tilde{k} \in \tilde{I}$ mit $\tilde{k} \leq k$ derart, dass u eine Linearkombination ist von $\{\tilde{u}_n\}_{n=0}^{\tilde{k}}$.

Fourieranalysis

Kapitel 9

Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$



9.1 Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$

Man definiert die Fourier-Transformation für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(\mathfrak{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n \quad (9.1)$$

und das Ergebnis ist eine Funktion $\mathfrak{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Das funktioniert genau so wie in einer Dimension. Vergleicht man mit dem eindimensionalen Fall, dann wurde in (9.1) $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^n$ und $x\xi$ ersetzt durch

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \cdots + x_n \xi_n.$$

Weil

$$\begin{aligned} \exp(-2\pi i x \cdot \xi) &= \exp\left(-2\pi i \sum_{k=1}^n x_k \xi_k\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \exp(-2\pi i x_k \xi_k) \end{aligned}$$

und weil Fubini-Tonelli gilt, kann man die Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ sogar auffassen als wiederholte, eindimensionale Fourier-Transformation:

$$\mathfrak{F}_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\xi_1, \dots, \xi_n)} = \mathfrak{F}_{x_n \rightarrow \xi_n} \circ \cdots \circ \mathfrak{F}_{x_2 \rightarrow \xi_2} \circ \mathfrak{F}_{x_1 \rightarrow \xi_1},$$

das heißt $\mathfrak{F}_{x_k \rightarrow \xi_k}$ ist die eindimensionale Fourier-Transformation wirkend auf der k -ten Variablen, wobei die anderen Koordinaten/Variablen sich als Parameter benehmen.

Die Rechenregeln von Lemma 7.2.2 passen sich an:

Lemma 9.1.1 *Eigenschaften der n -dimensionalen Fourier-Transformation.*

1. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$$

wohl-definiert, weil $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt, und

$$(\mathfrak{F}(f * g))(\xi) = (\mathfrak{F}f)(\xi) (\mathfrak{F}g)(\xi).$$

2. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $f_h(x) := f(x + h)$ gilt

$$(\mathfrak{F}f_h)(\xi) = e^{2\pi i h \cdot \xi} (\mathfrak{F}f)(\xi).$$

3. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $f^h(x) := e^{2\pi i h \cdot x} f(x)$ gilt

$$(\mathfrak{F}f^h)(\xi) = (\mathfrak{F}f)(\xi - h).$$

4. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $c \in \mathbb{R}^+$ und $f_c(x) := f(cx)$ gilt

$$(\mathfrak{F}f_c)(\xi) = c^{-n} (\mathfrak{F}f)(c^{-1}\xi).$$

5. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{\partial}{\partial x_k} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\left(\mathfrak{F} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f \right) \right) (\xi) = 2\pi i \xi_k (\mathfrak{F}f)(\xi).$$

6. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $g(x) = x_k f(x)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$(\mathfrak{F}g)(\xi) = \frac{1}{-2\pi i} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\mathfrak{F}f)(\xi).$$

7. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $R \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ eine Rotationsmatrix¹ gilt

$$(\mathfrak{F}(f \circ R))(\xi) = (\mathfrak{F}f)(R\xi).$$

Bemerkung 9.1.2 Wenn alle Integrierbarkeitsbedingungen erfüllt sind, zum Beispiel wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, die schnell-fallenden, beliebig oft differenzierbaren Funktionen in $\mathbb{R}^n$, dann kann man aus 5. und 6. folgern, dass

$$(-2\pi i)^\alpha \mathfrak{F}(x^\alpha \partial_x^\beta f(x))(\xi) = (2\pi i)^\beta \partial_\xi^\alpha (\xi^\beta (\mathfrak{F}f)(\xi)).$$

¹ R ist eine Rotationsmatrix, wenn $R^T R = I$ und $\det(R) = 1$.

Hier ist die folgende **Multiindexnotation** benutzt: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ setzt man

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$\partial_x^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}.$$

Außerdem schreibt man $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ und nennt $|\alpha|$ die Ordnung bei x^α und ∂_x^α .

Beweis. Die Beweise der ersten 6 sind ähnlich wie die in einer Dimension. Die Skalierung bei 4. wirkt in jeder Dimension und daher c^{-n} statt c^{-1} . Die 7. Behauptung verwendet den Trafosatz und dass $R^{-1} = R^T$ und $\det(R) = \det(R^T) = 1$ für eine Rotationsmatrix R :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}(f \circ R))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(Rx) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (R^T \tilde{x}) \cdot \xi} f(\tilde{x}) d(R^T \tilde{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot (R\xi)} f(\tilde{x}) |\det(R^T)| d\tilde{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot (R\xi)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = (\mathfrak{F}f)(R\xi). \end{aligned}$$

Auch sollte man sich erinnern, dass $(A^T x) \cdot y = x \cdot (Ay)$. ■

Aufgabe 9.1 Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $|\nu| = 1$.

1. Zeigen Sie, wenn $f, |\nabla f| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass dann gilt

$$\left(\mathfrak{F} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f \right) \right) (\xi) = 2\pi i \langle \nu, \xi \rangle (\mathfrak{F}f)(\xi) \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. Angenommen $x \mapsto |x| f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt, geben Sie dann eine Formel ohne Ableitung für $\frac{\partial}{\partial \nu}(\mathfrak{F}f)(\xi)$.

Korollar 9.1.3 Wenn $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ radialsymmetrisch ist, dann ist auch $\mathfrak{F}f$ radialsymmetrisch.

Beweis. Dies folgt aus dem letzten Ergebnis von Lemma 9.1.1. ■

9.2 Fourier-Transformation via $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Wir haben $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ schon genannt, aber geben noch die genaue Definition:

Definition 9.2.1 Die Menge $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beinhaltet alle Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, für die

1. für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die Ableitung $\partial^\alpha f$ existiert, und
2. für jedes Paar $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ die Funktion $x \mapsto x^\beta \partial^\alpha f(x)$ auf $\mathbb{R}^n$ beschränkt ist.

Auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hat man die Halbnormen $\|\cdot\|_{k,\ell}$, wie für $n = 1$, und man kann auch wieder eine Metrik d_S definieren:

$$\|u\|_{k,\ell} := \max_{|\alpha|=\ell} \sup_{|\beta|=k} |x^\beta \partial^\alpha f(x)|.$$

Weil $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ deutlich mehr Funktionen erfasst als die reinen Produktfunktionen $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$, können wir nicht direkt die Ergebnisse von $\mathfrak{F}_{x \rightarrow \xi}$ bekommen, wenn wir $\mathfrak{F}_{x_n \rightarrow \xi_n} \circ \cdots \circ$

$\mathfrak{F}_{x_1 \rightarrow \xi_1}$ betrachten. Wir laufen mal entlang den Schritten in einer Dimension.

Als Folge von Bemerkung 9.1.2 finden wir schon direkt das folgende Ergebnis, ähnlich wie in Lemma 7.5.1:

Korollar 9.2.2 Wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und die Abbildung

$$\mathfrak{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d_S) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d_S) \quad (9.2)$$

ist stetig.

Der nächste Schritt war, dass die Abbildung $\mathfrak{F}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, nun wäre das die Abbildung in (9.2), invertierbar ist. Den Beweis des Theorems 7.5.2 können wir übernehmen, weil die ähnlichen Rechenregeln gelten; siehe Lemma 9.1.1. Nur eine Sache ist anders, wir brauchen nämlich einen Ersatz des ein-dimensionalen

$$\mathfrak{F}(e^{-\pi x^2})(\xi) = e^{-\pi \xi^2} \text{ mit } \xi \in \mathbb{R}.$$

Der Ersatz ist die Funktion $e^{-\pi |x|^2}$ und glücklicherweise gilt

$$\exp(-\pi |x|^2) = \exp\left(\sum_{m=1}^n -\pi x_m^2\right) = \prod_{m=1}^n \exp(-\pi x_m^2).$$

Weil $e^{-\pi |x|^2}$ also ein Produkt „eindimensionaler“ Funktionen ist, ist die n -dimensionale Fourier-Transformation dieser Funktion das Produkt ein-dimensionaler Fourier-Transformationen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{x \rightarrow \xi}(e^{-\pi |x|^2})(\xi) &= \mathfrak{F}_{x \rightarrow \xi}\left(\prod_{m=1}^n e^{-\pi x_m^2}\right)(\xi) \\ &= \prod_{m=1}^n \left(\mathfrak{F}_{x_m \rightarrow \xi_m}(e^{-\pi x_m^2})(\xi_m)\right) = \prod_{m=1}^n e^{-\pi \xi_m^2} = e^{-\pi |\xi|^2}. \end{aligned}$$

Den Rest des Beweises von Theorem 7.5.2 kann man übernehmen und wir erhalten:

Theorem 9.2.3 (Fourier Inverse auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) Die Abbildung

$$\mathfrak{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d_S) \rightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d_S)$$

ist invertierbar und die Inverse $\mathfrak{F}^{-1}$ ist definiert durch

$$(\mathfrak{F}^{-1}f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) d\xi.$$

Auch Parseval bleibt gültig, weil auch das Argument in (7.8) angepasst werden kann.

Lemma 9.2.4 (Parseval auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|f\|_2 = \|\mathfrak{F}f\|_2 \quad \text{und} \quad \langle f, g \rangle = \langle \mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g \rangle.$$

Als Nächstes erweitert man die Fourier-Transformation $\mathfrak{F}$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$(\mathfrak{F}A)(u) := \mathfrak{F}(Au),$$

nimmt für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ wieder $A_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$A_f(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx, \quad (9.3)$$

und zeigt für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit der neuen Fassung von Parseval die Abschätzung

$$|\mathfrak{F}(A_f)u| \leq \|f\|_2 \|u\|_2 = \|\mathfrak{F}f\|_2 \|u\|_2.$$

Diese Abschätzung lässt sich wieder stetig erweitern für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Auch hier wird der Repräsentationssatz von Riesz angewendet und man bekommt:

Theorem 9.2.5 (Plancherel) Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und sei $\mathfrak{F}$ definiert auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ als Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. Dann gibt es genau eine Funktion $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit :

$$\mathfrak{F}(A_f) = A_{\hat{f}}.$$

Hier sind A_f und $A_{\hat{f}}$ wie in (9.3) definiert. Weil $\mathfrak{F}(A_f) = A_{\mathfrak{F}f}$, heißt das $\mathfrak{F}f = \hat{f}$ f.ü.

2. Außerdem gilt $\|\mathfrak{F}f\|_2 = \|f\|_2$.

Auch hier finden wir:

Korollar 9.2.6 $\mathfrak{F} : (L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$ ist eine Isometrie.

Lemma 9.2.7 Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und definiere

$$\hat{f}_M(\xi) := \int_{|x| < M} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx.$$

Dann gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|\mathfrak{F}f - \hat{f}_M\|_2 = 0.$$

Beweis. Weil $\mathbf{1}_{B_M(0)}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt, ist $\hat{f}_M = \mathfrak{F}(\mathbf{1}_{B_M(0)}f)$ als Integral definiert. Den Grenzwert findet man durch die zweite Aussage in Theorem 9.2.5:

$$\|\mathfrak{F}f - \hat{f}_M\|_2 = \|f - \mathbf{1}_{B_M(0)}f\|_2 \rightarrow 0$$

für $M \rightarrow \infty$. ■

Lemma 9.2.8 (Parseval) Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathfrak{F}f, \mathfrak{F}g \rangle.$$

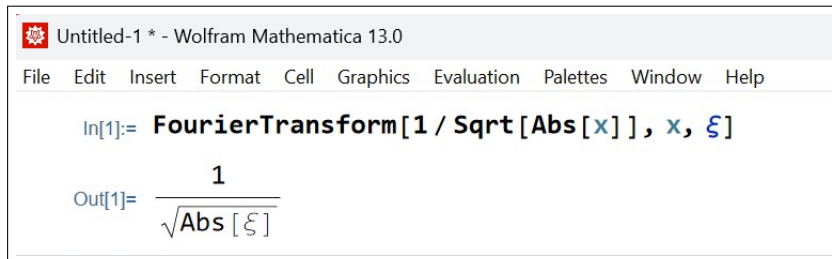
Beweis. Dies folgt auch hier mit der Polarisationsformel aus der zweiten Aussage von Theorem 9.2.5. ■

Aufgabe 9.2 Wenn man für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ Folgendes definiert

$$\hat{f}_\varepsilon(\xi) := \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-\varepsilon |x|^2} f(x) dx,$$

gilt dann $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\mathfrak{F}f - \hat{f}_\varepsilon\|_2 = 0$?

Aufgabe 9.3 Wolfram Mathematica hat die Fourier-Transformation implementiert. Hier ist ein Beispiel in $\mathbb{R}$:



Diese Software verwendet laut Webseite:

$$\mathcal{F}_t[f(t)](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (9.4)$$

Wenn man das Ergebnis in dem Bild glauben darf, ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

eine Eigenfunktion von $\mathfrak{F}$ aus (9.4). Dann wäre

$$f(\sqrt{2\pi}x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}|x|}}$$

eine Eigenfunktion von unserem $\mathfrak{F}$. Stimmt das?

Als Hilfe noch die Umrechnung bei den Transformationen:

$$\sqrt{2\pi} (\mathcal{F}_x[f(x)])(-2\pi\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = (\mathfrak{F}f)(\xi).$$

9.3 Fourier-Transformation auf $L^p(\mathbb{R}^n)$

Die $L^p(\mathbb{R}^n)$ -Vektorräume mit $p \in [1, \infty)$ haben als Norm $\|\cdot\|_p$, definiert durch

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Für $p \in (1, 2)$ gilt $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. Wenn $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dann definiert man

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } |f(x)| > 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Weil

$$\|f_1\|_1 = \int_{|f|>1} |f(x)| dx \leq \int_{|f|>1} |f(x)|^p dx \leq \|f\|_p^p,$$

$$\|f_2\|_2^2 = \int_{|f|\leq 1} |f(x)|^2 dx \leq \int_{|f|\leq 1} |f(x)|^p dx \leq \|f\|_p^p,$$

findet man $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Das bedeutet, dass die Fourier-Transformation auch auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen mit $p \in (1, 2)$ auch wohl-definiert ist. Wir haben

$$\mathfrak{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ und } \mathfrak{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n),$$

und so könnte man vermuten, dass die Menge $\mathfrak{F}(L^p(\mathbb{R}^n))$ mit $p \in (1, 2)$ irgendwie in $L^q(\mathbb{R}^n)$ mit $q \in (2, \infty)$ endet.

Ohne Beweis geben wir das folgende Ergebnis:

Theorem 9.3.1 (Hausdorff-Young²) Sei $1 < p < 2 < q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\|\mathfrak{F}f\|_q \leq \|f\|_p. \quad (9.5)$$

Bemerkung 9.3.2 Man nennt (9.5) die **Hausdorff-Young Ungleichung**. Wenn $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (nehme ausnahmsweise $\frac{1}{\infty} = 0$), dann sind die Abschätzungen für $\mathfrak{F}$ auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ und auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ auch dabei.

Für $p \in (2, \infty]$ findet man kein solches Ergebnis. Wenn wir den Extremfall $p = \infty$ betrachten, dann könnten wir versuchen $\mathfrak{F}\mathbf{1}$ herauszufinden. Die Funktion $f(x) := 1$ liegt ja in $L^\infty(\mathbb{R})$. Direkt als Integral kann man dies nicht berechnen, aber wenn man die Approximation in Aufgabe 9.2 verwendet, folgt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} e^{-\varepsilon x^2} \mathbf{1} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\pi^2 x^2 / \varepsilon}$$

und

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} e^{-\pi^2 x^2 / \varepsilon} = 0 \text{ für } x \neq 0.$$

²Felix Hausdorff, 1868-1942

²William Henry Young, 1863-1942

Eine $L^1(\mathbb{R})$ -Funktion, die fast überall gleich 0 ist, ist die Nullfunktion. Dass $\mathfrak{F}\mathbf{1}$ jedoch gleich 0 wäre, scheint wohl unwahrscheinlich.

Betrachtet man die Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dann folgt für die Dirac- δ -Distribution

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}\delta_0)(u) &= \delta_0(\mathfrak{F}u) = (\mathfrak{F}u)(0) \\ &= \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-2\pi i x \cdot 0} u(x) dx = \int_{x \in \mathbb{R}} \mathbf{1} u(x) dx \end{aligned}$$

und ähnlich auch $\mathfrak{F}^{-1}\delta_0 = \mathbf{1}$. Weil $\mathfrak{F}$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ invertierbar ist, folgt $\mathfrak{F}\mathbf{1} = \delta_0$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dann ist $\mathfrak{F}\mathbf{1}$ eine Distribution und keine $L^1(\mathbb{R})$ -Funktion.

9.4 Anwendung auf die Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung der Form

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) \text{ mit } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \quad (9.6)$$

oder $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, wenn das betreffende Gebiet beschränkt ist oder zumindest einen Rand hat. In beiden letzten Fällen braucht es Randbedingungen auf $\partial\Omega$. Auf $\mathbb{R}^n$ sucht man meistens Lösungen, die für $|x| \rightarrow \infty$ nach 0 gehen. Unabhängig von Randbedingungen braucht man Bedingungen für $t = 0$, meistens in der Form

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ u_t(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (9.7)$$

Die Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ liefert die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle (erkennbar in einer Lösung) verbreitet. Durch Skalieren kann man annehmen, dass $c = 1$.

Die Gleichung in (9.6) mit Anfangsbedingungen in (9.7) kann man via

$$\hat{u}(\xi, t) = (\mathfrak{F}u(\cdot, t))(\xi)$$

umschreiben mit Lemma 9.1.1 und

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

nach

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi \cdot \xi \hat{u}(\xi, t) & \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) := (\mathfrak{F}u_0)(\xi) & \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}_t(\xi, 0) = \hat{v}_0(\xi) := (\mathfrak{F}v_0)(\xi) & \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.8)$$

Hier steht eine gewöhnliche Differentialgleichung mit t als Variable und ξ als Parameter. Mit

$$\xi \cdot \xi = |\xi|^2$$

ist die Lösung von (9.8) wie folgt:

$$\hat{u}(\xi, t) = \cos(2\pi |\xi| t) \hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} \hat{v}_0(\xi). \quad (9.9)$$

Bemerkung 9.4.1 Weil

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi \rho t)}{2\pi \rho} = t$$

werden wir $\frac{\sin(2\pi \rho t)}{2\pi \rho}$ für $\rho = 0$ durch t erweitern, ohne dass wir dies jedes Mal erwähnen.

Formal hat man dann mit $\hat{u}$ aus (9.9) als Lösung

$$u(x, t) = (\mathfrak{F}^{-1} \hat{u}(\cdot, t))(x). \quad (9.10)$$

Es gibt jedoch direkt einige Fragen, die wir mal als Problem formulieren:

Problem 9.4.2 1. Für welche Funktionen u_0 und v_0 ist u in (9.10) eine Lösung von (9.6-9.7)?

2. Ist u in (9.10) die einzige Lösung von (9.6-9.7)?

3. Kann man u in (9.10) vernünftiger schreiben?

Zu 1. Wenn $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dann folgt, dass $\hat{u}_0, \hat{v}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Weil

$$|\cos(y)| \leq 1 \text{ und } \frac{|\sin(yt)|}{|y|} \leq t \quad (9.11)$$

sind die Ausdrücke

$$\xi \mapsto \cos(2\pi |\xi| t) \text{ und } \xi \mapsto \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|}$$

beschränkt, wenn t beschränkt ist, und liegt $\xi \mapsto \hat{u}(\xi, t)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ für jedes t . Damit ist $u(\cdot, t)$ in (9.10) für jedes t eine Funktion in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Das heißt jedoch nicht, dass man u differenzieren kann und u erfüllt so nicht die Differentialgleichung auf klassische Art.

Wenn $u_0, v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann kann man zeigen, dass man tatsächlich eine Funktion bekommt, die man differenzieren kann und die (9.6-9.7) im klassischen Sinne erfüllt.

Weil (9.11) gilt und die Potenzreihen

$$\cos(2\pi |\xi| t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-4\pi^2 \xi \cdot \xi t^2)^m}{(2m)!}$$

und ähnlich

$$\frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} = t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-4\pi^2 \xi \cdot \xi t^2)^m}{(2m+1)!}$$

zeigen, dass beide Funktion beliebig oft differenzierbar sind, geht die Differenzierbarkeit von u_0 und v_0 direkt ein in der Differenzierbarkeit von $u(x, t)$.

Optimal für die Existenz einer Lösung wäre ein Funktionenraum für u_0 und v_0 zwischen $L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Zu 2. Man betrachtet

$$E(u)(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_t(x, t)|^2 + |\nabla u(x, t)|^2) dx. \quad (9.12)$$

Wenn $u, u_t, u_{tt}, u_{x_i}, u_{t,x_i}, u_{x_i x_j}$ als Funktionen von x alle in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegen, dann kann man im Folgenden partiell integrieren und man erhält:

$$\begin{aligned} \partial_t E(u)(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_{tt} u_t + \nabla u_t \cdot \nabla u) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t u_{tt} - u_t \nabla \cdot \nabla u) dx = 0. \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Das bedeutet $E(u)(t) = E(u)(0)$. Hat man zwei solche Lösungen u_a und u_b , die beide (9.6-9.7) erfüllen, dann erfüllt die Differenz $u_a - u_b$ (9.6-9.7) mit $u_0 = v_0 = 0$. Wegen (9.13) gilt

$$E(u_a - u_b)(t) = E(u_b - u_a)(0) = 0$$

und aus (9.12) folgt, dass

$$\begin{aligned} |\partial_t (u_a(x, t) - u_b(x, t))| &= 0, \\ |\nabla (u_a(x, t) - u_b(x, t))| &= 0, \end{aligned}$$

für alle x und t . Also gilt

$$u_a(x, t) - u_b(x, t) = c$$

und weil $u_a(x, 0) = u_b(x, 0)$, folgt $c = 0$. Beide Lösungen sind identisch.

Zu 3. Wir benutzen

$$\begin{aligned} \cos(2\pi |\xi| t) &= \frac{e^{2\pi i |\xi| t} + e^{-2\pi i |\xi| t}}{2}, \\ \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} &= \frac{e^{2\pi i |\xi| t} - e^{-2\pi i |\xi| t}}{4\pi i |\xi| t}. \end{aligned}$$

Dann findet man

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}^{-1} \cos(2\pi |\xi| t) \hat{u}_0(\xi))(x) &= \\ \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \frac{e^{2\pi i |\xi| t} + e^{-2\pi i |\xi| t}}{2} \hat{u}_0(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (9.14)$$

und

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{F}^{-1} \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} \hat{v}_0(\xi) \right)(x) &= \\ \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \frac{e^{2\pi i |\xi| t} - e^{-2\pi i |\xi| t}}{4\pi i |\xi| t} \hat{v}_0(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Um einfachere Lösungsformeln zu finden, werden wir die einzelnen Dimensionen getrennt betrachten.

9.5 Lösungsformel für die Wellengleichung

Die Kombination von (9.6-9.7) ist das Anfangswertproblem für die homogene Wellengleichung auf $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.16)$$

Wir werden in diesem Abschnitt die Lösung mit (9.14) und (9.15) explizit schreiben. Die Ergebnisse sind dimensionsabhängig.

Dimension 1 In einer Dimension hat man, weil beide Funktionen gerade sind

$$\begin{aligned} \cos(2\pi|\xi|t) &= \cos(2\pi\xi t) \text{ und} \\ \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} &= \frac{\sin(2\pi\xi t)}{2\pi\xi}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (9.14) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i(x+t)\xi} + e^{2\pi i(x-t)\xi}}{2} \hat{u}_0(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} u_0(x+t) + \frac{1}{2} u_0(x-t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (9.15) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i(x+t)\xi} - e^{2\pi i(x-t)\xi}}{4\pi i\xi} \hat{v}_0(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i(x+t)\xi} - e^{2\pi i(x-t)\xi}}{2} \frac{\hat{v}_0(\xi)}{2\pi i\xi} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i(x+t)\xi} - e^{-2\pi i(x-t)\xi}}{2} \mathfrak{F} \left(\int_0^x v_0(y) dy \right) (\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{x+t} v_0(y) dy - \int_0^{x-t} v_0(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) dy. \end{aligned}$$

Theorem 9.5.1 (d' Alembert)³ Wenn $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$, findet man eine Lösung von (9.16) durch

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x+t) + \frac{1}{2} u_0(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) dy.$$

Bemerkung 9.5.2 Wenn wir vorher nicht $c = 1$ genommen hätten, dann hätte man die folgende Formel bekommen:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x+ct) + \frac{1}{2} u_0(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy.$$

Man sieht hier zwei mit Geschwindigkeit c auseinanderlaufende Wellen.

Einen Beweis, dass diese Formel stimmt, bekommt man durch direktes Eingeben in das Anfangswertproblem. Dazu braucht man nicht die Fourier-Transformation.

Dimension 3 In 3 Dimensionen brauchen wir einige Teilergebnisse, die wir als Lemma formulieren.

Lemma 9.5.3 Sei $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$ die Einheitssphäre. Dann gilt für $\xi \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} e^{2\pi i \omega \cdot \xi} d\omega = \frac{\sin(2\pi|\xi|)}{2\pi|\xi|}.$$

³Jean le Rond d'Alembert, 1717-1783

Beweis. Man kann die sphärischen Koordinaten so wählen, dass die z -Achse in Richtung ξ zeigt. Oder anders gesagt, das Integral für ξ und für $(0, 0, |\xi|)$ gibt das gleiche Ergebnis. Mit

$$\omega = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta),$$

$$d\omega = \sin \theta d\varphi d\theta$$

folgt, dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} e^{2\pi i \omega \cdot (0, 0, |\xi|)} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{2\pi i |\xi| \cos \theta} \sin \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{2\pi i |\xi| \cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-e^{2\pi i |\xi| \cos \theta}}{2\pi i |\xi|} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-e^{-2\pi i |\xi|} + e^{2\pi i |\xi|}}{4\pi i |\xi|} = \frac{\sin(2\pi |\xi|)}{2\pi |\xi|}. \end{aligned}$$

■

Wir brauchen auch den sphärischen Mittelwert einer Funktion über die Sphäre um x mit Radius r :

$$(M_r u)(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} u(x + r\omega) d\omega. \quad (9.17)$$

Aufgabe 9.4 Zeigen Sie:

1. Wenn $u \in C(\mathbb{R}^3)$, dann gilt $\lim_{r \downarrow 0} (M_r u)(x) = u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

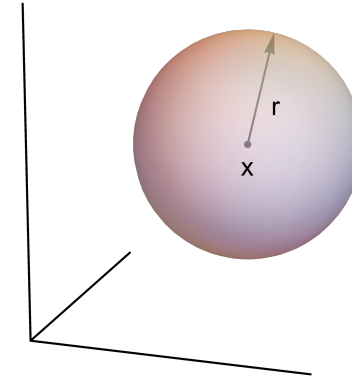


Abbildung 9.1: Durchschnittswert über den Rand der Sphäre um x mit Radius r

2. Wenn $u \in C^k(\mathbb{R}^3)$, dann gilt $M_r u \in C^k(\mathbb{R}^3)$ für alle $r > 0$.
3. Wenn $u \in C^k(\mathbb{R}^3)$, dann gilt $r \mapsto M_r u(x) \in C^k[0, \infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
4. Wenn $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dann gilt $M_r u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ für alle $r > 0$.
5. Wenn $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dann gilt $\partial_r^k M_r u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ für alle $r > 0$ und $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 9.5.4 Sei $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt

$$\mathfrak{F}(M_r u)(\xi) = \frac{\sin(2\pi |\xi| r)}{2\pi |\xi| r} \mathfrak{F}(u)(\xi).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}(M_r u)(\xi) &= \int_{x \in \mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{1}{4\pi} \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} u(x + r\omega) \, d\omega \, dx \\
 &= \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \frac{1}{4\pi} \int_{x \in \mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x + r\omega) \, dx \, d\omega \\
 &= \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \frac{1}{4\pi} \int_{x \in \mathbb{R}^3} e^{-2\pi i (x - r\omega) \cdot \xi} u(x) \, dx \, d\omega \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} e^{2\pi i \omega \cdot r \xi} d\omega \int_{x \in \mathbb{R}^3} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) \, dx \\
 &= \frac{\sin(2\pi |\xi| r)}{2\pi |\xi| r} \mathfrak{F}(u)(\xi).
 \end{aligned}$$

■

Theorem 9.5.5 Wenn $u_0, v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dann ist

$$u(x, t) = \partial_t (t (M_t u_0)(x)) + t (M_t v_0)(x)$$

mit M_t aus (9.17) eine Lösung von (9.16).

Bemerkung 9.5.6 Das M_t sorgt für radialsymmetrische Verbreitung aus x mit Geschwindigkeit $c = 1$.

Beweis. Mit Lemma 9.5.4 finden wir, dass der zweite Teil von (9.10) folgendes Ergebnis liefert:

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} \mathfrak{F}(v_0)(\xi) \right) (x) = t M_t v_0(x).$$

Für den ersten Teil findet man, jedenfalls für $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, dass

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{F}^{-1} \left(\cos(2\pi |\xi| t) \mathfrak{F}(u_0)(\xi) \right) (x) \\
 &= \mathfrak{F}^{-1} \left(\partial_t \frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} \mathfrak{F}(u_0)(\xi) \right) (x) \\
 &= \partial_t \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{\sin(2\pi |\xi| t)}{2\pi |\xi|} \mathfrak{F}(u_0)(\xi) \right) (x) \\
 &= \partial_t (t M_t u_0(x)).
 \end{aligned}$$

■

Andere Dimensionen Relativ einfache Formeln, wie in Dimension 1 und 3 wird man für Dimension 2 nicht bekommen. Man findet für $n = 2$ eine Lösung, wenn man die Funktionen $u_0, v_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ erweitert auf $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_0(x_1, x_2, x_3) &:= u_0(x_1, x_2), \\
 \tilde{v}_0(x_1, x_2, x_3) &:= v_0(x_1, x_2),
 \end{aligned}$$

und diese in die Formel für 3 Dimensionen einsetzt. Für $u_0, v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ gilt zwar nicht, dass $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, aber auch hier bleibt die Formel in Theorem 9.5.5 richtig.

Auch in höheren Dimensionen gibt es derartige Lösungsformeln. In ungeraden Dimensionen wird dazu die sphärische Mittelwertfunktion in $\mathbb{R}^n$,

$$(M_t u)(x) := \frac{1}{|\mathbb{S}^n|} \int_{\omega \in \mathbb{S}^n} u(x + t\omega) \, d\omega \quad (9.18)$$

verwendet, mit $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ und

$$|\mathbb{S}^n| = \int_{\omega \in \mathbb{S}^n} 1 \, d\omega.$$

Theorem 9.5.7 Wenn $u_0, v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit n ungerade, dann findet man mit M_t aus (9.18) eine Lösung von (9.16) durch

$$u(x, t) = \partial_t \left(t^{-1} \partial_t \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} (M_t u_0)(x) \\ + \left(t^{-1} \partial_t \right)^{\frac{n-3}{2}} t^{n-2} (M_t v_0)(x). \quad (9.19)$$

Bemerkung 9.5.8 Für $n = 3$ folgt Theorem 9.5.5.

Bemerkung 9.5.9 In geraden Dimensionen steigt man herunter aus der nächsthöheren ungeraden Dimension, ähnlich wie man für $n = 2$ eine Lösungsformel bekommt aus der Formel für $n = 3$.

Aufgabe 9.5 Sei $u_0, v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. Zeigen Sie, dass es Funktionen $u_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$(M_t u_0)(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^m t^{2k} u_k(x) + \mathcal{O}_{t \downarrow 0}(t^{2m+1}).$$

2. Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass für u in (9.19) gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$$

und

$$\lim_{t \downarrow 0} u_t(x, t) = v_0(x).$$



10.1 Gewöhnliche DGL mit Fourier

Wir haben gesehen, wie die Fourier-Transformation Ableitungen ersetzt durch Multiplikation:

$$\mathfrak{F}(u')(\xi) = 2\pi i \xi (\mathfrak{F}u)(\xi).$$

Ein lineäre Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten wird so eine algebraische Gleichung:

$$\sum_{k=0}^m a_k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u(x) = f(x)$$

wird die Fourier-Transformation zu

$$p(\xi) (\mathfrak{F}u)(\xi) = (\mathfrak{F}f)(\xi)$$

mit p ein Polynom definiert durch

$$p(\xi) := \sum_{k=0}^m a_k (2\pi i \xi)^k.$$

Wenn $p(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$, dann folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(\mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{p(\xi)} (\mathfrak{F}f)(\xi) \right)(x) \\ &= \left(\left(\mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{p(\xi)} \right) * f \right)(x). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ folgt $\mathfrak{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und dann auch

$$\left(\xi \mapsto \frac{1}{p(\xi)} (\mathfrak{F}f)(\xi) \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Die Bedeutung von $\mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{p(\xi)}$ kann man dann so nur in $L^2(\mathbb{R})$ oder $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ verstehen.

Beispiel 10.1 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-u''(x) + z u(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \quad (10.2)$$

Nach Fourier-Transformation folgt

$$u(x) = \left(\mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 + z} (\mathfrak{F}f)(\xi) \right)(x).$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist $\xi \mapsto (4\pi^2 \xi^2 + z)^{-1}$ in $L^2(\mathbb{R})$ und da gilt

$$\left(\mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 + z} \right)(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{e^{2\pi i x \xi}}{4\pi^2 \xi^2 + z} d\xi.$$

Dieser Integrand hat zwei Singularitäten in $\mathbb{C}$, nämlich für $\xi \in \{w_+, w_-\}$ mit

$$w_{\pm} = \frac{\pm i}{2\pi} \sqrt{|z|} e^{\frac{i}{2} \text{Arg}(z)}.$$

Weil $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ folgt

$$\text{Im}(w_+) > 0 > \text{Im}(w_-)$$

und es gibt keine Singularität auf der reellen Achse. Mit Hilfe eines Kurvenintegrals in $\mathbb{C}$ folgt für $x > 0$, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{e^{2\pi i x \xi}}{4\pi^2 \xi^2 + z} d\xi \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\square} \frac{e^{2\pi i x \xi}}{4\pi^2 \xi^2 + z} d\xi = i \frac{e^{2\pi i x w_+}}{4\pi w_+}. \end{aligned}$$

Wenn $x < 0$, dann nimmt man eine in der reellen Achse

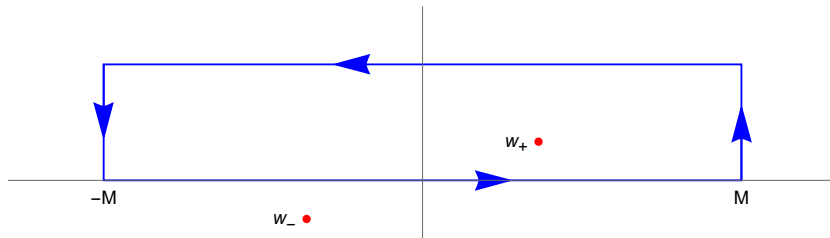


Abbildung 10.1: Die Kurve in $\mathbb{C}$ wenn $x > 0$

gespiegelte Kurve und bekommt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{e^{2\pi i x \xi}}{4\pi^2 \xi^2 + z} d\xi = -i \frac{e^{2\pi i x w_-}}{4\pi w_-}.$$

Für $z \in \mathbb{R}^+$ findet man $w_+ = \frac{i\sqrt{z}}{2\pi} = -w_-$ und

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} f(y) dy. \quad (10.3)$$

□

Auch für partielle Differentialgleichungen mit konstanten oder polynomialen Koeffizienten kann man mit Fourier-Transformation eine Lösung finden. Weil man dabei dividieren muss, sollte es nicht zu viele Nullstellen geben. Dies führt zu einer bestimmten Klasse von Differentialgleichungen.

Aufgabe 10.1 Sei $z \in \mathbb{R}^+$, $f \in C(\mathbb{R})$ und betrachte (10.2).

1. Sie können die Formel in (10.3) geradeaus kontrollieren. Tun Sie das.
2. Welche Behauptungen gelten:
 - (a) $f \in L^1(\mathbb{R}) \implies u \in L^1(\mathbb{R})$,
 - (b) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
 - (c) $f \in L^2(\mathbb{R}) \implies u \in L^2(\mathbb{R})$.
3. Die Funktion in (10.3) ist nicht die einzige Lösung. Geben Sie alle Lösungen.
4. Zeigen Sie, dass die Funktion in (10.3) die einzige in $L^2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 10.2 Sei $f \in C(\mathbb{R})$ und betrachte $-u''(x) = f(x)$.

1. Für welche f ist $u(x) := -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x-y| f(y) dy$ eine Lösung?

2. Für welche f ist $u(x) := -\int_0^x (x-y) f(y) dy$ eine Lösung?

3. Gibt es eine Lösung mit $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$?

Aufgabe 10.3 Sei $z \in \mathbb{R}^-$ und betrachte (10.2). Beantworten Sie die gleichen Fragen wie in Aufgabe 10.2. Mögliche Lösungsformeln sind:

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(|x-y|\sqrt{-z})}{2\sqrt{-z}} f(y) dy,$$

$$u(x) = - \int_0^x \frac{\sin((x-y)\sqrt{-z})}{\sqrt{-z}} f(y) dy.$$

Aufgabe 10.4 Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Finden Sie eine Lösung $u \in L^2(\mathbb{R})$ von $u'''(x) + 4u(x) = f(x)$.

10.2 Definition von elliptisch

Wir werden nur solche partielle Differentialgleichungen betrachten, bei denen die Koeffizienten konstant sind. Als Erstes schauen wir uns die Differentialgleichungen zweiter Ordnung an. Diese Differentialgleichungen gaben den Namen.

Definition 10.2.1 Die partielle Differentialgleichung in $\mathbb{R}^n$ der Form

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x) \quad (10.4)$$

nennt man **elliptisch** zweiter Ordnung, wenn für das **Hauptsymbol**

$$P_H(\xi) := \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha \quad (10.5)$$

gilt, dass $P_H(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \neq 0$.

Das **Symbol** der obigen Gleichung wird definiert durch $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha$ und für das Hauptsymbol betrachtet man nur die Termen höchster Ordnung. Sowohl P_H als P sind hier Polynome zweiten Grades. Es ist kein Zufall, dass man $\frac{\partial}{\partial x_j}$ durch $2\pi i \xi_j$ ersetzt, wie man eigentlich schon erkennen sollte.

Bemerkung 10.2.2 $P_H(\xi) \neq 0$ heißt $\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \xi^\alpha \neq 0$ und das bringt zwei Möglichkeiten:

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \xi^\alpha < 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ oder}$$

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \xi^\alpha > 0 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Im ersten Fall ist die partielle Differentialgleichung (10.4) elliptisch, genau dann, wenn

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n; P_H(\xi) = 1\} \quad (10.6)$$

ein Ellipsoid ist. Im zweiten Fall ersetzt man 1 durch -1 , um ein Ellipsoid zu finden..

Bemerkung 10.2.3 In dem ersten Fall von Remark 10.2.2 sind die Mannigfaltigkeiten $\{\xi \in \mathbb{R}^n; P(\xi) = \lambda\}$, für λ genügend groß, ähnliche Ellipsoiden als in (10.6), das heißt, höchstens verschoben und skaliert: Es gibt nämlich $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$P_H(\xi - \xi_0) = P(\xi) - P(\xi_0) \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

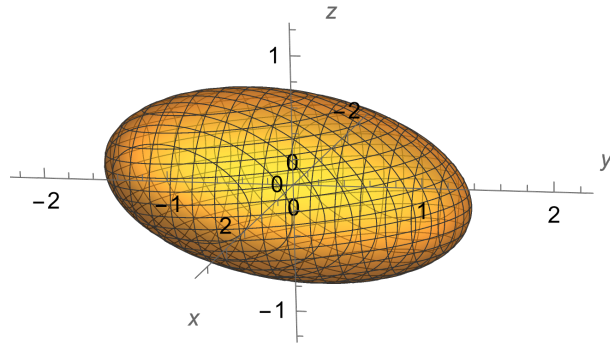


Abbildung 10.2: Die Mannigfaltigkeit $\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + \xi_2\xi_3 + 2\xi_3^2 = 1$

Aufgabe 10.5 Zeigen Sie diese letzte Behauptung. Hinweis: P hat genau ein Minimum.

Lemma 10.2.4 Weil die a_α konstant sind, ist die Elliptizität zweiter Ordnung äquivalent zu:
Es gibt $c > 0$ derart, dass

$$|P_H(\xi)| \geq c|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wenn man die Fourier-Transformation wirken lässt auf die Differentialgleichung in (10.4), dann folgt formal:

$$P(\xi)\mathfrak{F}u = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha (2\pi i\xi)^\alpha \mathfrak{F}u = \mathfrak{F}f.$$

Wenn f gegeben ist und u wird gesucht, dann liegt es auf der Hand, das Folgende zu versuchen:

$$\mathfrak{F}u = \frac{1}{P(\xi)}\mathfrak{F}f$$

und nach der inversen Fourier-Transformation hätte man eine Lösung:

$$u = \mathfrak{F}^{-1} \frac{1}{P(\xi)} \mathfrak{F}f.$$

Man sieht, wieso $P(\xi) = 0$ hier ein Problem liefert.

Für die Vollständigkeit geben wir noch die folgende Klassifizierung:

Definition 10.2.5 Die partielle Differentialgleichung in $\mathbb{R}^n$ der Form

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x) \quad (10.7)$$

nennt man *elliptisch von Ordnung $2m$* , wenn für das Hauptsymbol

$$P_H(\xi) := \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha (2\pi i\xi)^\alpha \quad (10.8)$$

gilt, dass es $c > 0$ gibt derart, dass

$$|P_H(\xi)| \geq c|\xi|^{2m} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

10.3 Beispiele

Beispiel 10.2 Wir betrachten das Problem

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Das heißt, eine Funktion f ist gegeben und eine Lösung u wird gesucht.

Wenn die Funktion f eine Fourier-Transformation erlaubt, dann kann man versuchen, diese Gleichung umzuschreiben:

$$\mathfrak{F}(-\Delta u + u)(\xi) = (\mathfrak{F}f)(\xi) \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Weil $\Delta u = \sum_{m=1}^n \partial_{x_m}^2$, folgt

$$\mathfrak{F}(-\Delta u)(\xi) = - \sum_{m=1}^n (2\pi i \xi_m)^2 (\mathfrak{F}u)(\xi)$$

und

$$\mathfrak{F}(-\Delta u + u)(\xi) = (4\pi^2 |\xi|^2 + 1) (\mathfrak{F}u)(\xi).$$

Das bedeutet

$$(\mathfrak{F}u)(\xi) = \frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} (\mathfrak{F}f)(\xi)$$

und, wenn die Inverse erlaubt ist,

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} (\mathfrak{F}f)(\xi) \right) \\ &= \left(\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} \right) * f \right)(x). \end{aligned}$$

Man bekommt

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} d\xi.$$

Die (inverse) Fourier-Transformation einer radialsymmetrischen Funktion ist wieder radialsymmetrisch. Wenn wir dies

mit zylindrischen Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ schreiben, genauer gesagt mit $\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ und ξ' mit sphärischen Koordinaten in $\mathbb{R}^{n-1}$, bekommen wir :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i |x| \xi_1} \frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i |x| \xi_1} \frac{1}{4\pi^2 \xi_1^2 + 4\pi^2 |\xi'|^2 + 1} d\xi_1 \right) d\xi' \\ &= |\mathbb{S}^{n-2}| \int_{r=0}^{\infty} \left(\int_{\xi_1 \in \mathbb{R}} e^{2\pi i |x| \xi_1} \frac{1}{4\pi^2 \xi_1^2 + 4\pi^2 r^2 + 1} d\xi_1 \right) r^{n-2} dr. \end{aligned}$$

Mit Kenntnissen von komplexen Funktionen kann man das innere Integral bestimmen via eines Kurvenintegrals in $\mathbb{C}$ und unter Verwendung des Residuensatzes:

$$\int_{\xi_1 \in \mathbb{R}} e^{2\pi i |x| \xi_1} \frac{1}{4\pi^2 \xi_1^2 + 4\pi^2 r^2 + 1} d\xi_1 = \frac{e^{-\sqrt{4\pi^2 r^2 + 1}|x|}}{2\sqrt{4\pi^2 r^2 + 1}}.$$

Wir finden

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} \right)(x) = |\mathbb{S}^{n-2}| \int_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{4\pi^2 r^2 + 1}|x|}}{2\sqrt{4\pi^2 r^2 + 1}} r^{n-2} dr.$$

Für jedes ungerade n kann man das letzte Integral explizit berechnen. Für gerades n braucht man spezielle Funktionen.

- Für $n = 3$ findet man zum Beispiel

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} \right)(x) = \frac{e^{-|x|}}{\pi |x|}$$

und dies führt zu

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{\pi |x-y|} f(y) dy. \quad (10.9)$$

- Für $n = 5$ findet man

$$\mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} \right) (x) = \frac{e^{-|x|} (1 + |x|)}{3\pi^2 |x|^3}$$

und dies führt zu

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^5} \frac{e^{-|x-y|} (1 + |x-y|)}{3\pi^2 |x-y|^3} f(y) dy. \quad (10.10)$$

Die Singularitäten, $y \mapsto |x-y|^{-1}$ und $y \mapsto |x-y|^{-3}$, die hier erscheinen, sind harmlos. In $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^5$ sind die kritischen Potenzen in $|x-y|^p$ beziehungsweise -3 und -5 und man bleibt davon entfernt:

$$\int_{y \in B_1(x) \subset \mathbb{R}^n} |x-y|^p dy < \infty \Leftrightarrow p > -n.$$

Wir sollten auch schauen, für welche Funktionen diese Rechnungen passen. Die Funktion

$$\xi \mapsto \frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1}$$

liegt leider nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ für $n \geq 2$ und damit ist $\mathfrak{F}^{-1}$ dieser Funktion nicht direkt als Integral definiert. Sie liegt auch nur in $L^2(\mathbb{R}^n)$, wenn $n \leq 3$, und auch da wäre sie nur durch die Approximation

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{B_M(0)}(x) e^{2\pi i x \cdot \xi} \frac{1}{4\pi^2 |\xi|^2 + 1} d\xi$$

definiert. Das heißt nicht, dass (10.10) falsch ist, jedoch schon, dass diese Formel anders verifiziert werden muss, nämlich als Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\square$

10.4 Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Zum Beispiel ist die Funktion $f = \mathbf{1}$, definiert durch $f(x) := 1$ auf $\mathbb{R}$, nicht in $L^p(\mathbb{R})$ für $p \in [1, 2]$ und hat so keine Fourier-Transformation durch ein Integral oder Integralapproximation. Es bleibt nur die Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Wir werden nur ein paar Fälle berechnen.

Lemma 10.4.1 Sei $\mathfrak{F}$ die Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Hier ist δ_0 die Dirac- δ -Distribution. Reguläre Distributionen werden identifiziert mit der zugehörigen Funktion.

1. $\mathfrak{F}\delta_0 = \mathbf{1}$.
2. $\mathfrak{F}\mathbf{1} = \delta_0$.
3. $(\mathfrak{F}\text{sign})(u) = \frac{1}{\pi i} \left(\text{CH}_{\xi}^{\frac{1}{2}} \right) (u)$.
Für $\text{CH}_{\xi}^{\frac{1}{2}}$ siehe Bemerkung 10.4.2.
4. $\mathfrak{F}(\delta'_0)(\xi) = 2\pi i \xi$.
5. $\mathfrak{F}(2\pi i x) = -\delta'_0$.

Bemerkung 10.4.2 Bei 3. findet man oft in der Literatur

$$(\mathfrak{F}\text{sign})(\xi) = \frac{1}{\pi i \xi}.$$

Man muss jedoch bemerken, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi} u(\xi) d\xi$ für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $u(0) \neq 0$ nicht definiert ist. Cauchy hat den folgenden Vorschlag gemacht, der jetzt bekannt ist als der **Cauchysche Hauptwert**:

$$\left(\text{CH}_{\xi}^{\frac{1}{2}} \right) (u) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|\xi| > \varepsilon} \frac{1}{\xi} u(\xi) d\xi.$$

Diese Formel ist für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ wohl-definiert:

$$\int_{|\xi|>\varepsilon} \frac{1}{\xi} u(\xi) d\xi = \int_{\xi=\varepsilon}^{\infty} \frac{u(\xi) - u(-\xi)}{\xi} d\xi$$

und hier gibt es keine Singularität in 0, weil

$$\frac{u(\xi) - u(-\xi)}{\xi} = 2u'(0) + \mathcal{O}_{\xi \rightarrow 0}(\xi).$$

Alternativ kann man für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch Folgendes nehmen:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|\xi|>\varepsilon} \frac{1}{\xi} u(\xi) d\xi = \int_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{\xi} \left(u(\xi) - u(0)e^{-\xi^2} \right) d\xi. \quad (10.11)$$

Aufgabe 10.6 1. Zeigen Sie, dass für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\left(\xi \mapsto \frac{1}{\xi} \left(u(\xi) - u(0)e^{-\xi^2} \right) \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

2. Zeigen Sie, für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt (10.11).

Beweis von Lemma 10.4.1. Zu 1. und 2. Weil

$$(\mathfrak{F}\delta_0)(u) := \delta_0(\mathfrak{F}u) = (\mathfrak{F}u)(0) = \int_{x \in \mathbb{R}} u(x) dx = A_1(u)$$

finden wir, wenn wir reguläre Distributionen mit den verbundenen Funktionen identifizieren, dass

$$\mathfrak{F}\delta_0 = \mathbf{1}$$

und weil $\mathbf{1}(-x) = \mathbf{1}(x)$, gilt

$$\delta_0 = \mathfrak{F}^{-1}\mathbf{1} = \mathfrak{F}\mathbf{1}.$$

Zu 3. Man findet

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}\text{sign})(u) &= (\text{sign})(\mathfrak{F}u) = \int_{\xi \in \mathbb{R}} \text{sign}(\xi)(\mathfrak{F}u)(\xi) d\xi \\ &= \left(\int_{\xi>0} - \int_{\xi<0} \right) \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} u(x) dx d\xi \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\xi=0}^M \int_{x \in \mathbb{R}} (e^{-2\pi i x \xi} - e^{2\pi i x \xi}) u(x) dx d\xi \\ &= -2i \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{\xi=0}^M \sin(2\pi x \xi) d\xi u(x) dx \\ &= -i \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{1 - \cos(2\pi x M)}{\pi x} u(x) dx. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Um hier das Theorem von Riemann-Lebesgue zu verwenden, müssen wir $\cos(2\pi x M)$ neben eine beschränkte Funktion setzen. Dies schaffen wir mittels Ersetzen von $u(x)$ durch

$$u(x) - u(0)e^{-\pi x^2}.$$

Weil das zusätzliche Integral eine antisymmetrische Funktion betrifft, bleibt das geänderte Integral gleich dem alten Integral. Weil

$$\left(x \mapsto \frac{u(x) - u(0)e^{-\pi x^2}}{\pi x} \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

folgt dann

$$(10.12) = -i \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x \in \mathbb{R}} (1 - \cos(2\pi x M)) \frac{u(x) - u(0)e^{-\pi x^2}}{\pi x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -i \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\pi x} \left(u(x) - u(0) e^{-\pi x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{\pi i} \left(\text{CH} \frac{1}{x} \right) (u).
\end{aligned}$$

Zu 4. und 5. Ähnlich wie bei 1 und 2 folgt

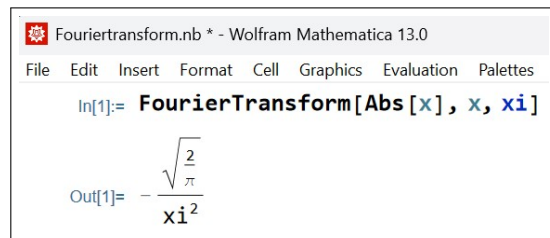
$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F} \delta'_0)(u) &:= \delta'_0(\mathfrak{F} u) = -(\mathfrak{F} u)'(0) \\
&= \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} \int_{x \in \mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} u(x) dx \right)_{\xi=0} \\
&= \left(\int_{x \in \mathbb{R}} 2\pi i x e^{-2\pi i x \xi} u(x) dx \right)_{\xi=0} \\
&= \int_{x \in \mathbb{R}} 2\pi i x u(x) dx.
\end{aligned}$$

Wieder nach Identifizierung bei regulären Distributionen folgt

$$\mathfrak{F}(\delta'_0) = 2\pi i x$$

$$\text{und } \delta'_0 = \mathfrak{F}^{-1}(2\pi i x) = \mathfrak{F}(-2\pi i x). \quad \blacksquare$$

Aufgabe 10.7 Was halten Sie von $\mathfrak{F}(|\cdot|)(\xi) = \frac{-1}{2\pi^2 \xi^2}$ in $\mathbb{R}$? Mathematica zeigt mit seiner Definition in (9.4):



Aufgabe 10.8 1. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ wohl-definiert ist durch

$$A(u) := \int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{2\pi^2 \xi^2} \left(u(\xi) - (u(0) + \xi u'(0)) e^{-\xi^2} \right) d\xi - \frac{u(0)}{\pi \sqrt{\pi}}.$$

2. Zeigen Sie, dass $A(u) = (\mathfrak{F}(|\cdot|))(u)$ für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beispiel 10.3 Das Symbol für den Laplace-Operator Δ ist $-4\pi^2 |\xi|^2$. Um eine Lösung zu finden von

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n$$

wäre es gut $\mathfrak{F}^{-1}|\xi|^{-2}$ zu berechnen in $\mathbb{R}^n$. Für $L^1(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen haben wir gezeigt, dass die Radialsymmetrie erhalten bleibt. Hoffentlich folgt auch hier aus der Radialsymmetrie von $|\xi|^2$ die von $\mathfrak{F}^{-1}|\xi|^{-2}$. In dem Fall gilt auch $\mathfrak{F}^{-1}|\xi|^{-2} = \mathfrak{F}|\xi|^{-2}$. Weil $|c\xi|^{-2} = c^{-2}|\xi|^{-2}$, folgt mit Lemma 9.1.1 hoffentlich auch hier

$$\mathfrak{F}(|\xi|^{-2})(x) = c^2 \mathfrak{F}(|c\xi|^{-2})(x) = c^{2-n} \mathfrak{F}(|\xi|^{-2})(c^{-1}x).$$

Für $c = |x|$ würde nun gelten:

$$\mathfrak{F}(|\xi|^{-2})(x) = |x|^{2-n} \mathfrak{F}(|\xi|^{-2})\left(\frac{x}{|x|}\right) = \gamma_n |x|^{2-n}.$$

Für $n = 2$ wäre das Ergebnis eine Konstante und das kann schon nicht stimmen. Für $n \geq 3$ schauen wir mal weiter und da wäre die Lösung der Differentialgleichung dann

$$u(x) = \gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{2-n} f(y) dy.$$

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist dieses Integral wohl-definiert. $\square$

10.5 Intermezzo zu Gauß

Die ein-dimensionale **partielle Integration**

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

führt mit dem Satz von Fubini-Tonelli, der besagt

$$\int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]} u(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1,$$

also mehrdimensionales Integral gleicht wiederholte ein-dimensionale Integrale, zu

$$\begin{aligned} \int_{x' \in A} \int_a^b u(x_1, x') \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, x') dx_1 dx' = \\ \int_{x' \in A} [u(x_1, x') v(x_1, x')]_{x_1=a}^b dx' - \\ \int_{x' \in A} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x') v(x_1, x') dx dx'. \quad (10.13) \end{aligned}$$

Um von (10.13) nach Gauß zu gelangen verweisen wir auf Abbildung 10.3.

In drei Dimensionen vergleicht man den Flächeninhalt F_Q vom Quadrat ganz links mit F_a und F_b der beiden Parallelepipeden links und rechts am skizzierten Stab. Man findet, jedenfalls wenn die linke oder die rechte Seite nicht gerade senkrecht steht:

$$F_Q = \left(-\vec{n}_a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) F_a = \left(\vec{n}_b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) F_b$$

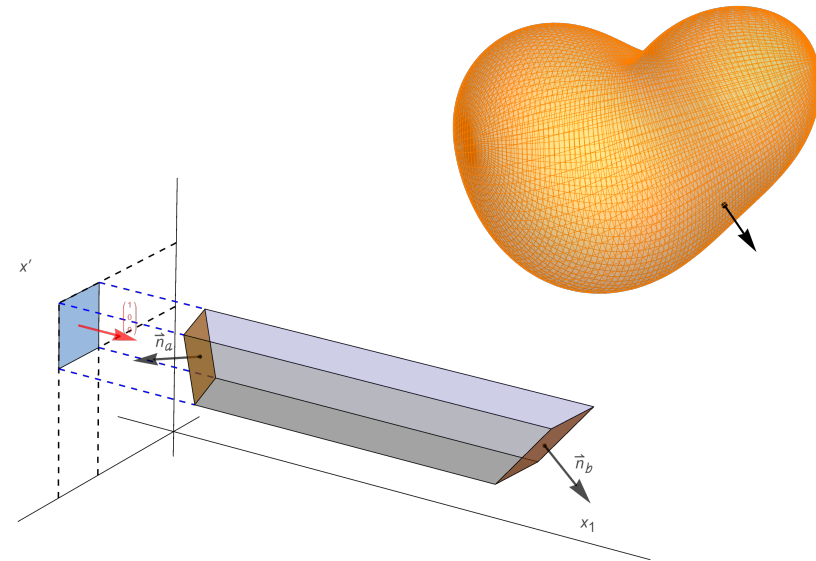


Abbildung 10.3: Rechts oben Ω mit auswärtigem Normalenvektor und links unten ein Balkendurchschnitt in Ω

und dies führt hier bei dem Randintegral zu

$$,, dx' = dx_2 dx_3 = -n_{a,1} d\sigma_a = n_{b,1} d\sigma_b "$$

mit $\vec{n}_x = (n_{x,1}, n_{x,2}, n_{x,3})$ dem auswärtigen Normalenvektor.

Damit so ein auswärtiger Normalenvektor wohl-definiert ist, muss der Rand $\partial\Omega$ glatt¹ sein. Man braucht C^1 auch, um

¹Den Rand $\partial\Omega$ nennen wir glatt bei $\tilde{x} \in \partial\Omega$, wenn, nach einer Drehung D und neue Koordinaten $y = D(x - \tilde{x})$, eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R})$ existiert mit $f(0, \dots, 0) = 0$ und es ein $r = r(\tilde{x}) > 0$ gibt derart, dass

$$\Omega \cap B_r(\tilde{x}) = \{ \tilde{x} + D^{-1}y; y \in B_r(0) \text{ und } y_n > f(y_1, \dots, y_{n-1}) \}.$$

das Randintegral als Integral über eine Mannigfaltigkeit zu definieren. Ausnahmen, wie rechteckige Gebiete, sind möglich.

Das erste Integral nach dem Gleichheitszeichen in (10.13) ist ein $(n-1)$ -dimensionales Integral und wird ein Randintegral, wenn man auch allgemeinere Gebiete zulässt.

Die partielle Integration auf einem Gebiet Ω wird dann das folgende Ergebnis:

Theorem 10.5.1 (Satz von Gauß²)

Nehme an $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sei $\vec{n}_x = (\mathbf{n}_{x,1}, \dots, \mathbf{n}_{x,n})$ der auswärtige Normalenvektor auf $\partial\Omega$ an der Stelle x . Dann gilt für einmal stetig differenzierbare Funktionen $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u v \mathbf{n}_{x,i} d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx.$$

Allgemeiner formuliert wird es mit einem einmal stetig differenzierbaren Vektorfeld $\vec{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\Omega} \vec{u} \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v (\vec{u} \cdot \vec{n}_x) d\sigma - \int_{\Omega} v (\nabla \cdot \vec{u}) dx \quad (10.14)$$

Hier gehört dx zu dem n -dimensionalen Integral und $d\sigma$ zu dem $(n-1)$ -dimensionalen Flächenintegral.

Bemerkung 10.5.2 Oft verwendet man $\nu := \vec{n}_x$ für den auswärtigen Normalenvektor.

Den ganzen Rand $\partial\Omega$ nennen wir glatt, wenn dies an jeder Stelle $\tilde{x} \in \partial\Omega$ gilt und man nur endlich viele Randstellen $\tilde{x}$ braucht für $\partial\Omega \subset \bigcup B_r(\tilde{x})$. Eindeutiger wäre es, einen solchen Rand C^1 zu nennen, denn manchmal wird glatt auch für C^∞ -Rand benutzt.

²Carl Friedrich Gauß, 1777-1855

In (10.14) verwendet man den Gradienten ∇ und die Divergenz $\nabla \cdot$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \nabla v &= u_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial v}{\partial x_n}, \\ v (\nabla \cdot \vec{u}) &= v \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$

Wenn die involvierten Funktionen zweimal stetig differenzierbar sind, dann folgt durch zweimaliges Anwenden und mit $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ der **Satz von Green**³:

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u v - u \nabla v) \cdot \vec{n}_x d\sigma + \int_{\Omega} u \Delta v dx.$$

Weil $\nabla u \cdot \vec{n}_x = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ gilt, kann man die letzte Gleichung auch wie folgt schreiben:

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Omega} u \Delta v dx.$$

Beispiel 10.4 Zurück zum letzten Beispiel. Wir müssen dieses Raten jedoch noch kontrollieren. Wenn $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und derart ist, dass die Integrale wohl-definiert sind, das heißt, die betreffenden Funktionen sollen genügend schnell nach 0 konvergieren, dann können wir Folgendes machen:

³George Green, 1793-1841

Der erste Schritt verwendet den Satz von Gauß:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{2-n} \Delta u(y) dy \\
 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} |y|^{2-n} \Delta u(x - y) dy \\
 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{|y| = \varepsilon} |y|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} u(x - y) d\sigma_y \right. \\
 &\quad \left. - \int_{|y| > \varepsilon} \nabla |y|^{2-n} \cdot \nabla u(x - y) dy \right). \quad (10.15)
 \end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned}
 & \int_{|y| = \varepsilon} |y|^{2-n} \frac{\partial}{\partial \nu} u(x - y) d\sigma_y = \\
 & \quad \varepsilon^{2-n} \int_{|\omega| = 1} \nu \cdot \nabla u(x - \varepsilon \omega) \varepsilon^{n-1} d\omega = \mathcal{O}(\varepsilon),
 \end{aligned}$$

verfolgen wir und finden wieder mit dem Integralsatz von Gauß:

$$\begin{aligned}
 (10.15) &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \nabla |y|^{2-n} \cdot \nabla u(x - y) dy \\
 &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(- \int_{|y| = \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} |y|^{2-n} u(x - y) d\sigma_y \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|y| > \varepsilon} \Delta |y|^{2-n} u(x - y) dy \right). \quad (10.16)
 \end{aligned}$$

Hier verwendet man

$$\begin{aligned}
 & - \int_{|y| = \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} |y|^{2-n} u(x - y) d\sigma_y \\
 &= (2 - n) \varepsilon^{1-n} \int_{|\omega| = 1} u(x - \varepsilon \omega) \varepsilon^{n-1} d\omega \\
 &= (2 - n) |\mathbb{S}^{n-1}| u(x)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Delta |y|^{2-n} &= (2 - n) \nabla \cdot \frac{y}{|y|^n} \\
 &= (2 - n) \left(\frac{n}{|y|^n} - \frac{ny \cdot y}{|y|^{n+2}} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Via (10.16) folgt

$$u(x) = -\gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{2-n} \Delta u(y) dy$$

für $\gamma_n = \frac{1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|}$. □

Lemma 10.5.3 Für $n > 2$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$u(x) = \gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{2-n} f(y) dy \quad (10.17)$$

mit $\gamma_n = \frac{1}{(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|}$ eine Lösung von $-\Delta u = f$.

Bemerkung 10.5.4 Auch wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, liegt u aus (10.17) nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Mit sorgfältigen Integralabschätzungen kann man zeigen, dass für ein $c \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$|u(x)| \leq \frac{c}{1 + |x|^{n-2}},$$

jedoch im Allgemeinen nicht für größere Exponenten als $n-2$. Mehr ist generell nicht zu holen und das heißt, dass die Lösung u in (10.17) im Allgemeinen nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Weil man mit Hilfe majorisierter Konvergenz zeigt, dass

$$\begin{aligned} \nabla_x u(x) &= \gamma_n \nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{2-n} f(y) dy \\ &= \gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x |x-y|^{2-n} f(y) dy \\ &= -\gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y |x-y|^{2-n} f(y) dy \\ &= \gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{2-n} \nabla f(y) dy, \end{aligned}$$

gilt auch für ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}^+$, dass

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{\tilde{c}}{1 + |x|^{n-2}}. \quad (10.18)$$

Man kann dieses Argument wiederholen und findet $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und dass alle Ableitungen eine Abschätzung wie in (10.18) erfüllen. Dann gilt auch

$$-\Delta u(x) = \gamma_n \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y |x-y|^{2-n} \cdot \nabla f(y) dy$$

$$\begin{aligned} &= \gamma_n \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y|>\varepsilon} \nabla f(x-y) \cdot \nabla_y |y|^{2-n} dy \\ &= \gamma_n \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{|y|=\varepsilon} f(x-y) \nabla |y|^{2-n} \cdot \vec{\nu}_y d\sigma_y \right. \\ &\quad \left. - \int_{|y|>\varepsilon} f(x-y) \Delta |y|^{2-n} dy \right) = f(x). \end{aligned}$$

Dieser Schritt sieht ähnlich aus, wie in Beispiel 10.3. Dort waren wir jedoch geraten, während wir hier u durch (10.17) aus f konstruiert haben. ■

Aufgabe 10.9 Für $n > 4$ kann man auf ähnliche Art eine Lösung raten für

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

1. Raten Sie!

2. Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Wenn Sie mehr wissen wollen über Lösungsmethoden bei partiellen Differentialgleichungen mit Fourier-Transformationen, dann schauen Sie in die Bücher von Hörmander⁴, zum Beispiel [8].

⁴Lars Hörmander, 1931-2012



11.1 Kompakte Mengen

Um in diesem Abschnitt die Ergebnisse einigermaßen begründet zu beschreiben, brauchen wir einige Begriffe und Resultate aus der Funktionalanalysis und werden diese anwenden auf eine partielle Differentialgleichung. Die Beweise werden wir hier nicht immer liefern.

In diesem Abschnitt wird $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum sein.

Definition 11.1.1 Eine Menge $A \subset V$ heißt **kompakt**, wenn jede beschränkte Folge eine in A konvergente Teilfolge hat.

Beispiel 11.1 Das erste Beispiel einer kompakten Menge ist eine abgeschlossene, beschränkte Menge in $\mathbb{R}$, also $I_0 := [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Um zu zeigen, dass diese Menge kompakt ist, nimmt man eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I_0$ und man betrachtet $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$ und $[\frac{1}{2}(a+b), b]$. Man wählt eine der beiden mit unendlich vielen Elementen und nennt das I_1 , teilt es wieder in zwei Hälften und wählt wieder das Intervall I_2 mit

unendlich vielen Elementen, usw. Nun wählt man $x_{n_0} \in I_0$, $x_{n_1} \in I_1$ mit $n_1 > n_0$, $x_{n_2} \in I_2$ mit $n_2 > n_1$ usw. Die Folge $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $[a, b]$. $\square$

Dies bedeutet, dass kompakte Mengen beschränkt und abgeschlossen sind. In endlich dimensionalen Räumen ist beschränkt und abgeschlossen auch ausreichend für kompakt, wie der folgende Satz besagt:

Theorem 11.1.2 (Bolzano¹-Weierstraß²)

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Selbstverständlich kann man hier auch $\mathbb{C}^n$ lesen.

In unendlich dimensionalen Vektorräumen gilt das nicht mehr. Man braucht immer eine zusätzliche Einschränkung.

Beispiel 11.2 Der Vektorraum ℓ^2 ist die Menge aller Folgen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ mit $a_m \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) und

$$\|\mathbf{a}\|_{\ell^2} := \left(\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

¹Bernhard Bolzano, 1781-1848

²Karl Weierstraß, 1815-1897

Das passende innere Produkt ist

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{a_m} b_m$$

und macht ℓ^2 zu einem Hilbertraum.

Wir können hier die abgeschlossene Einheitskugel betrachten:

$$\overline{B} = \{ \mathbf{a} \in \ell^2; \|\mathbf{a}\|_{\ell^2} \leq 1 \}.$$

Sei $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ die Folge der Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, \underset{1 \text{ an } n\text{-ter Stelle}}{1}, 0, \dots).$$

Es gilt $\mathbf{e}_n \in \overline{B}$ und obwohl $\overline{B}$ beschränkt und abgeschlossen ist, gibt es keine konvergente Teilfolge von $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$, denn $\|\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m\|_2 = \sqrt{2}$ für $n \neq m$. $\square$

Wenn wir Funktionenräume wie $C(\bar{\Omega})$ betrachten, dann reicht auch hier Beschränktheit und Abgeschlossenheit nicht aus. Die Funktionen sollten zusätzlich zum Beispiel auch gleichgradig gleichmäßig stetig sein:

Theorem 11.1.3 (Arzelà³-Ascoli⁴)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und sei

$$\{u_m : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}\}_{m \in \mathbb{N}}$$

eine Folge mit den folgenden beiden Eigenschaften:

1. gleichmäßig beschränkt:

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \forall m \in \mathbb{N} \forall x \in \bar{\Omega} : |u_m(x)| \leq M,$$

³Cesare Arzelà, 1847-1912

⁴Giulio Ascoli, 1843-1896

2. gleichgradig⁵, gleichmäßig⁶ stetig:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall m \in \mathbb{N} \forall x, y \in \bar{\Omega} : \\ |x - y| < \delta \implies |u_m(x) - u_m(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dann gibt es eine Teilfolge $\{u_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, die in $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{\infty})$ konvergiert.

Trivialerweise sind beschränkte und abgeschlossene Teilmengen von endlich dimensionalen Teilräumen auch in unendlich dimensionalen Vektorräumen kompakt, aber das sind vielleicht nicht die interessantesten Mengen. Der Satz von Arzelà-Ascoli liefert nicht-triviale kompakte Mengen im unendlich dimensionalen $C(\bar{\Omega})$:

Beispiel 11.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{L^{\infty}(\Omega)})$. Sei A_M mit $M \in \mathbb{R}^+$ die Menge aller Funktionen $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \forall x \in \bar{\Omega} : |u(x)| &\leq M, \\ \forall x, y \in \bar{\Omega} : |u(x) - u(y)| &\leq M |x - y|. \end{aligned}$$

Wegen der ersten Abschätzung ist A_M beschränkt. Wegen der Zweiten gilt, dass die Funktionen in A_M gleichgradig gleichmäßig stetig sind. Jede Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in A_M hat mit Arzelà-Ascoli dann eine in $C(\bar{\Omega})$ konvergente Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Dieser Limes $u_{\infty} \in C(\bar{\Omega})$ in der $\|\cdot\|_{\infty}$ -Norm gibt auch den punktweisen Limes:

$$u_{\infty}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(x),$$

⁵gleichgradig stetig = *equicontinuous* ist eine Aussage für eine Familie von Funktionen.

⁶gleichmäßig stetig = *uniformly continuous* ist eine Aussage über eine Funktion auf ihrem ganzen Definitionsgebiet.

und u_∞ erfüllt so auch beide Abschätzungen:

$$|u_\infty(x)| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(x) \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |u_{n_k}(x)| \leq M$$

und ähnlich

$$|u_\infty(x) - u_\infty(y)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |u_{n_k}(x) - u_{n_k}(y)| \leq M |x - y|.$$

Dann gilt $u_\infty \in A_M$ und A_M ist also kompakt in $C(\bar{\Omega})$. $\square$

11.2 Kompakte Operatoren

Lineare Abbildungen werden oft Operatoren genannt. Für stetige Operatoren $A : (V_1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (V_2, \|\cdot\|_2)$ ist die **Operator-norm** definiert durch

$$\|A\|_{V_1 \rightarrow V_2} := \sup \left\{ \frac{\|Au\|_2}{\|u\|_1}; u \in V_1 \setminus \{0\} \right\}.$$

Stetigkeit von A ist dann äquivalent zu: $\|A\|_{V_1 \rightarrow V_2} < \infty$.

Definition 11.2.1 Eine Abbildung $F : (V_1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (V_2, \|\cdot\|_2)$ heißt **kompakt**, wenn für jede beschränkte Menge $B \subset V_1$ gilt, dass $\overline{F(B)}$ eine kompakte Menge in V_2 ist.

Eine kompakte lineare Abbildung $A : V_1 \rightarrow V_2$ ist übrigens stetig, denn $\overline{A(B_1(0))}$ ist kompakt und daher beschränkt, sagen wir $\overline{A(B_1(0))} \subset B_M(0) \subset V_2$, und das letztere impliziert $\|A\|_{V_1 \rightarrow V_2} \leq M$.

Nicht-lineare kompakte Abbildungen sind nicht unbedingt stetig, wie die Vorzeichenfunktion $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zeigt.

Aufgabe 11.1 Betrachte $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$ und die lineare Abbildung $F : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$, definiert durch

$$F(u)(x) := \int_0^x u(s) ds.$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung kompakt ist.

Lemma 11.2.2 Wenn $A, B : V \rightarrow V$ lineare Abbildungen sind mit A kompakt und B stetig, dann sind AB und BA kompakt.

Aufgabe 11.2 Beweisen Sie dieses Lemma.

11.3 Das Spektrum

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und

$$A : D(A) \subset V \rightarrow V$$

eine lineare Abbildung in V . Wir erlauben hier, dass A nur auf einer Teilmenge $D(A)$ von V definiert ist.

- $D(A)$ ist der Definitionsbereich.

Beispiel 11.4 Betrachte den Differentialoperator $A = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$ in $C[-1, 1]$ mit Norm $\|\cdot\|_\infty$. Die zweite Ableitung ist nur definiert für zweimal differenzierbare Funktionen, und weil $Au \in C[-1, 1]$ gelten soll, ist A sogar nur definiert für zweimal stetig differenzierbare Funktionen u . Das bedeutet $D(A) = C^2[-1, 1]$ mit $C^2[-1, 1]$ als die Einschränkung aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Die Abbildung A ist linear, aber nicht stetig. $\square$

Damit es noch einen Zusammenhang zwischen V und $D(A)$ gibt, nimmt man meistens an, und wir werden das auch machen, dass jedes Element von V mit Elementen aus $D(A)$ zu approximieren ist, also

$$\overline{D(A)}^{\|\cdot\|_V} = V. \quad (11.1)$$

Man sagt dann, dass A **dicht-definiert** ist in V .

- $R(A) := \{A(u); u \in D(A)\} \subset V$ ist die **Bildmenge**.
- $N(A) := \{u \in D(A); A(u) = 0\} \subset V$ ist der **Nullraum**, auch Kern genannt.

Wir erinnern noch an die Dimension von V . Die endliche Teilmenge $\{v_k\}_{k=1}^n \subset V$ heißt **unabhängig**, wenn für alle $c_k \in \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$ im Fall V ein reeller Vektorraum ist):

$$\sum_{k=1}^n c_k v_k = 0 \implies \forall k \in \{1, \dots, n\} \text{ gilt } c_k = 0.$$

Die **Dimension** von V ist definiert als

$$\dim V := \sup \{n \in \mathbb{N}; \exists \{v_k\}_{k=1}^n \subset V \text{ unabhängig}\}.$$

Die Dimension eines Teilraums $\tilde{V} \subset V$ wird ebenso definiert.

Eigenfunktion und Eigenwert bei einer linearen Abbildung wurden ähnlich wie bei Matrizen definiert in Definition 8.6.1. Auch hier findet man, dass für einen Eigenwert λ der Abbildung A gilt, dass

$$\{v \in V; Av = \lambda v\} \quad (11.2)$$

ein Teilraum ist von V . Man nennt (11.2) den **Eigenraum** von A für den Eigenwert λ . Die Dimension des Eigenraums ist die geometrische Multiplizität von λ . Es gibt auch hier die Algebraische:

Definition 11.3.1 Sei λ ein Eigenwert des linearen Operators $A : V \rightarrow V$.

- $\dim \{v \in V; (A - \lambda)v = 0\}$ ist die **geometrische Multiplizität** von λ .
- $\dim \{v \in V; (A - \lambda)^n v = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ ist die **algebraische Multiplizität** von λ .

Bei einer linearen Abbildung in $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{R}^n$, also dargestellt durch eine quadratische Matrix M , weiss man, dass $(M - zI)$ invertierbar ist, genau dann, wenn z kein Eigenwert ist. In unendlich dimensionalen Räumen ist das komplizierter.

Beispiel 11.5 Man betrachte den normierten Vektorraum der nach 0 konvergenten Zahlenfolgen:

$$c_0 := \left\{ \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots); \forall k \in \mathbb{N} : a_k \in \mathbb{R} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right\}$$

mit $\|\mathbf{a}\|_{c_0} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$

und die Verschiebungsabbildung

$$A(a_0, a_1, a_2, \dots) := (a_1, a_2, a_3, \dots). \quad (11.3)$$

Hier ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert, und trotzdem ist

$$A - I : c_0 \rightarrow c_0$$

nicht bijektiv. □

Aufgabe 11.3 Sei A wie in (11.3) und beweisen Sie diese letzten Behauptungen:

1. $\lambda = 1$ ist kein Eigenwert von A .
2. $A - I : c_0 \rightarrow c_0$ ist nicht bijektiv.

Definition 11.3.2

Sei V ein Banachraum und sei $A : D(A) \subset V \rightarrow V$ ein linearer Operator.

- Die **Resolventenmenge** $\rho(A)$ von A ist die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$ derart, dass für

$$A - zI : D(A) \rightarrow V \quad (11.4)$$

die folgenden Aussagen gelten:

1. Die Bildmenge $R(A - zI)$ ist eine dichte Teilmenge von V und
2. es gibt eine stetige Inverse $(A - zI)^{-1}$.

- Das **Spektrum** von A ist $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Bemerkung 11.3.3 Der Operator in (11.4) liefert eine dichte Bildmenge, wenn

$$\overline{R(A - zI)}^{\|\cdot\|_V} = V.$$

Eigenwerte sind ein Teil des Spektrums, denn für einen Eigenwert λ ist $A - \lambda I$ nicht injektiv.

Für reelle Operatoren wird manchmal auch nur $z \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Ein schönes Ergebnis bei kompakten Abbildungen A ist das Folgende: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es in $\{z \in \mathbb{C}; |z| > \varepsilon\}$ nur endlich viele Eigenwerte mit endlicher Multiplizität. Nur bei 0 benimmt sich eine solche Abbildung anders als eine endlich-dimensionale.

Theorem 11.3.4 (Riesz-Schauder⁷) Das Spektrum $\sigma(A)$ einer linearen, kompakten Abbildung $A : V \rightarrow V$ besteht aus

1. isolierten Eigenwerten $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit endlicher Multiplizität und höchstens 0 als Häufungspunkt dieser Eigenwerte, und
2. vereinigt mit möglicherweise $\lambda = 0$. Wenn $\dim(V) = \infty$, dann $0 \in \sigma(A)$.

Bemerkung 11.3.5 Man nennt einen Eigenwert λ isoliert in $\mathbb{C}$, wenn $\varepsilon > 0$ existiert derart, dass es keine Eigenwerte in $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - \lambda| < \varepsilon\}$ gibt. Der einzig mögliche, nicht-isolierte Eigenwert ist hier 0.

11.4 Besonderes zum Hilbertraum

In diesem Abschnitt ist $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Außerdem nehmen wir an, dass der Hilbertraum separabel ist. Separabel heißt, dass es eine abzählbare dichte Teilmenge von H gibt. Wenn ein Hilbertraum separabel ist, dann existiert ein vollständiges Orthonormalsystem für H . Das kann man wie folgt beweisen: Wenn $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge ist, dann

⁷Juliusz Schauder, 1899-1943

kann man damit eine orthonormale Teilmenge $\{\tilde{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren, und zwar derart, dass $u_n \in \text{Span}[\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^n]$. Im ersten Schritt löscht man die Funktion u_n aus der Teilmenge, iterativ nach $n \in \mathbb{N}$, wenn diese Funktion abhängig ist von ihren Vorgängern. Nachdem man so eine unabhängige Teilmenge mit $H = \overline{\text{Span}[\{\hat{u}_k\}_{k=0}^\infty]}$ bekommen hat, ist der zweite Schritt ebenfalls ein konstruktives Prozedere, nämlich das **Gram-Schmidt-Verfahren**, das vorgestellt wurde auf Seite 86.

Bekannte normierte Vektorräume, die separabel sind, sind die Lebesgue-Hilberträume für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen: $(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist separabel.

Definition 11.4.1 Für $V \subset H$ setzt man

$$V^\perp = \{u \in H; \text{für alle } v \in V \text{ gilt } \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Man nennt $V^\perp$ das **Orthogonale Komplement** von V .

Lemma 11.4.2 Sei H ein Hilbertraum und sei K eine nicht-leere, konvexe, abgeschlossene Menge in H . Zu jedem Element $u \in H$ gibt es genau ein $u_K \in K$ mit

$$\|u - u_K\|_H = \inf \{\|u - v\|; v \in K\}. \quad (11.5)$$

Siehe Abbildung 11.1.

Bemerkung 11.4.3 Die Menge $K \subset H$ heißt *konvex*, wenn

$$x, y \in K \implies \forall \theta \in (0, 1) : \theta x + (1 - \theta) y \in K.$$

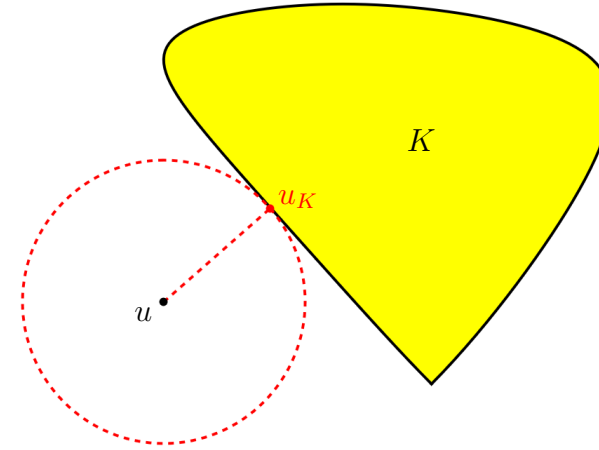


Abbildung 11.1: Zu Lemma 11.4.2: Die konvexe, abgeschlossene Menge K ist in gelb dargestellt/

Beweis. Für $u \in K$ nimmt man $u_K = u$ und man ist fertig.

Wenn $u \notin K$ und K nicht leer ist, gibt es $v_0 \in K$ und

$$0 \leq d := \inf \{\|u - v\|; v \in K\} \leq \|u - v_0\|. \quad (11.6)$$

Dann gibt es eine Minimalfolge $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - v_n\| = d. \quad (11.7)$$

Weil K konvex ist gilt auch

$$\frac{1}{2}(v_n + v_m) \in K$$

und

$$\|u - \frac{1}{2}(v_n + v_m)\|_H^2 \geq d. \quad (11.8)$$

Mit der Parallelogrammgleichung gilt

$$\begin{aligned} \|u - \frac{1}{2}(v_n + v_m)\|_H^2 + \|\frac{1}{2}(v_n - v_m)\|_H^2 \\ = \frac{1}{2}\|u - v_m\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u - v_n\|_H^2 \end{aligned}$$

und man findet mit (11.8):

$$\left\| \frac{1}{2} (v_n - v_m) \right\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|u - v_m\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u - v_n\|_H^2 - d.$$

Mit (11.7) folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v_m\|_H = 0$ und weil Cauchy-Folgen im Hilbertraum konvergieren, gibt es einen Grenzwert $v_\infty \in H$ mit

$$\begin{aligned} \|u - v_\infty\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - v_n\| \\ &= d = \inf \{ \|u - v\|_H ; v \in K \}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Weil K abgeschlossen ist, gilt außerdem $v_\infty \in K$. Nimmt man $u_K = v_\infty$, dann folgt die Gleichung (11.5).

Dieses v_∞ in (11.9) ist eindeutig. Wenn (11.9) auch für ein anderes $\tilde{v}_\infty \in K$ gilt, folgt aus der Konvexität, dass $\frac{1}{2} (v_\infty + \tilde{v}_\infty) \in K$, und aus der Parallelogrammgleichung, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \frac{1}{2} (v_\infty - \tilde{v}_\infty) \right\|_H^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u - v_\infty\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u - \tilde{v}_\infty\|_H^2 - \left\| u - \frac{1}{2} (v_\infty + \tilde{v}_\infty) \right\|_H^2 \\ &= d^2 - \left\| u - \frac{1}{2} (v_\infty + \tilde{v}_\infty) \right\|_H^2 \leq 0 \end{aligned}$$

und $v_\infty = \tilde{v}_\infty$. ■

Lemma 11.4.4 Sei H ein Hilbertraum und sei $V, W \subset H$. Nehme an, W ist ein abgeschlossener Teilraum von H . Dann gilt:

1. $V^\perp$ ist ein abgeschlossener Teilraum von H .
2. $H = W \oplus W^\perp$.

$$3. (W^\perp)^\perp = W.$$

Bemerkung 11.4.5 Die Menge H ist die **direkte Summe** der Mengen H_1 und H_2 , wenn für jedes $u \in H$ genau ein Paar $(u_1, u_2) \in H_1 \times H_2$ existiert mit $u_1 \in H_1$ und $u_2 \in H_2$.

Beweis. Zu 1. Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V^\perp$ konvergent in H . Sagen wir, $u \in H$ ist derart, dass $\|u_n - u\|_H \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Für jedes $v \in V$ gilt $\langle u_n, v \rangle = 0$ und weil

$$|\langle u, v \rangle| = |\langle u, v \rangle - \langle u_n, v \rangle| \leq \|u - u_n\|_H \|v\|_H \rightarrow 0,$$

gilt auch $\langle u, v \rangle = 0$. Also findet man $u \in V^\perp$.

Zu 2. Sei $u \in H$ und sei W ein abgeschlossener Teilraum von H . Teilräume sind konvex und enthalten 0. Wegen Lemma 11.4.2 gibt es dann genau ein $u_o \in W$ mit

$$\|u - u_o\|_H = d_u := \inf \{ \|u - v\|_H ; v \in W \}. \quad (11.10)$$

Wir behaupten $u - u_o \in W^\perp$. Wenn nicht, dann gibt es $w \in W$ mit $\langle u - u_o, w \rangle = c \neq 0$ und für $\tilde{w} = c^{-1}w \in W$ gilt, dass

$$\langle u - u_o, \tilde{w} \rangle = 1.$$

Weil $u_o + t\tilde{w} \in W$ und

$$\|u - u_o - t\tilde{w}\|_H^2 = d_u^2 - 2t + t^2 \|\tilde{w}\|_H^2 < d_u^2$$

für $t > 0$ und genügend klein, folgt ein Widerspruch zu (11.10). Also $u - u_o \in W^\perp$ und $u_o \in W$ und das bedeutet $H = W + W^\perp$. Für $u_a \in W$ mit $u - u_a \in W^\perp$ folgt

$$W \ni u_o - u_a = (u - u_a) - (u - u_o) \in W^\perp$$

und $\|u_o - u_a\|^2 = \langle u_o - u_a, u_o - u_a \rangle = 0$. Die Zerlegung ist also eindeutig und

$$H = W \oplus W^\perp. \quad (11.11)$$

Zu 3. Wir haben (11.11) und auch

$$H = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp. \quad (11.12)$$

Weil $W \subset (W^\perp)^\perp$, folgt aus (11.11) und (11.12), dass $W = (W^\perp)^\perp$. ■

Aufgabe 11.4 V ist eine Teilmenge vom Hilbertraum H .

1. Zeigen Sie $V \subset (V^\perp)^\perp$.
2. Geben Sie ein Beispiel an für $V \subset H$ mit $V \neq (V^\perp)^\perp$.

11.5 Lineare Abbildungen im Hilbertraum

Lineare Abbildungen in separablen Hilberträumen H haben Eigenschaften, die erinnern an endlich dimensionale Vektorräume. Für Matrizen $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ definiert man $A^* := \overline{A}^T$, also transponieren und komplex konjugieren, und findet dann

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle x, A^*y \rangle_{\mathbb{C}^n} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Eine adjungierte Abbildung auf einem Hilbertraum gibt es auch:

Definition 11.5.1 Sei $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ eine lineare Abbildung. Dann wird die **adjungierte** Abbildung A^* definiert durch:

1. $D(A^*) := \{v \in H; \exists c_v \in \mathbb{R}^+ \forall u \in D(A) : |\langle Au, v \rangle| \leq c_v \|u\|_H\},$
2. $\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$ für alle $u \in D(A)$ und $v \in D(A^*)$.

Definition 11.5.2 Sei $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ eine lineare Abbildung. Sie wird **selbstadjungiert** genannt, wenn $D(A^*) = D(A)$ und $A^*u = Au$ für alle $u \in D(A)$.

Wenn $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ stetig und dicht definiert ist, dann kann man A zu H erweitern, indem man für $u \in H$ eine Folge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ nimmt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ in H und $Au := \lim_{n \rightarrow \infty} Au_n$ definiert. Die Stetigkeit von A und die Vollständigkeit eines Hilbertraums implizieren die Konvergenz der Folge $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Für stetige lineare, insbesondere kompakte lineare Abbildungen dürfen wir also $D(A) = H$ annehmen.

Lemma 11.5.3 Sei $A : H \rightarrow H$ eine stetige, lineare Abbildung. Dann gilt $D(A^*) = H$ und A^* ist auch stetig.

Beweis. Stetigkeit der linearen Abbildung A bedeutet lineare Beschränktheit für A : es gibt $M_A > 0$ mit

$$\|Au\|_H \leq M_A \|u\|_H \text{ für alle } u \in H.$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt so für alle $u, v \in H$, dass

$$|\langle Au, v \rangle| \leq \|Au\|_H \|v\|_H \leq M_A \|u\|_H \|v\|_H$$

und mit $c_v = M_A \|v\|_H$, dass $D(A^*) = H$.

Für alle $u, v \in H$ folgt dann auch:

$$|\langle u, A^*v \rangle| = |\langle Au, v \rangle| \leq M_A \|u\|_H \|v\|_H.$$

Für $u = A^*v$ findet man

$$\|A^*v\|_H^2 \leq M_A \|A^*v\|_H \|v\|_H$$

und entweder $\|A^*v\|_H = 0$ oder

$$\|A^*v\|_H \leq M_A \|v\|_H.$$

Die lineare Beschränktheit bedeutet wieder, dass A^* stetig ist. ■

Theorem 11.5.4 Wenn $A : H \rightarrow H$ eine kompakte, lineare Abbildung ist, dann ist auch A^* kompakt.

Beweis. Kompakt und linear liefert stetig und weil A stetig ist, ist auch A^* stetig. Sei nun $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in H , sagen wir $\|u_n\|_H \leq K$. Dann ist auch $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ für $v_n := A^*u_n$ eine beschränkte Folge in H . Außerdem, weil A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ derart, dass $\{Av_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|A^*(u_{n_k} - u_{n_m})\|_H^2 &= \langle A^*(u_{n_k} - u_{n_m}), v_{n_k} - v_{n_m} \rangle \\ &= \langle u_{n_k} - u_{n_m}, Av_{n_k} - Av_{n_m} \rangle \\ &\leq \|u_{n_k} - u_{n_m}\|_H \|Av_{n_k} - Av_{n_m}\|_H \\ &\leq 2K \|Av_{n_k} - Av_{n_m}\|_H. \end{aligned}$$

Für $k, m \rightarrow \infty$ folgt

$$\|A^*(u_{n_k} - u_{n_m})\|_H \leq \sqrt{2K} \|Av_{n_k} - Av_{n_m}\|_H^{1/2} \rightarrow 0.$$

Eine Cauchy-Folge im Hilbertraum ist konvergent. ■

11.6 Die Fredholm Alternative

Wenn die kompakte lineare Abbildung A den Eigenwert $\lambda \neq 0$ hat, dann ist $\tilde{A} := \lambda^{-1}A$ selbstverständlich auch linear und kompakt und hat außerdem den Eigenwert 1. Das folgende Ergebnis kann man so anwenden auf $A - \lambda$ für alle Eigenwerte $\lambda \neq 0$. Dieser Abschnitt ist inspiriert durch den betreffenden Abschnitt aus dem Buch von Evans [5].

Theorem 11.6.1 (Die Fredholm⁸ Alternative) Sei

$$A : H \rightarrow H$$

eine kompakte lineare Abbildung. Dann gilt Folgendes:

1. $N(I - A)$ ist endlich dimensional.
2. $R(I - A)$ ist abgeschlossen.
3. $R(I - A) = N(I - A^*)^\perp$.
4. $N(I - A) = \{0\}$ genau dann, wenn $R(I - A) = H$.
5. $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$.

Beweis. Zu 1. Wenn $N(I - A)$ unendlich dimensional ist, dann gibt es $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $Au_n = u_n$ und jede Teilmenge $\{u_n\}_{n=0}^m$ unabhängig. Man kann mit dem Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ so ändern, dass

$$\text{Span}[\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_m] = \text{Span}[u_0, \dots, u_m] \text{ für jedes } m$$

⁸Erik Ivar Fredholm, 1866-1927

und dass $\{\tilde{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ orthonormal ist. Wir nennen es wieder $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt

$$\|u_n - u_m\|_H^2 = \|u_n\|_H^2 - 2 \operatorname{Re} \langle u_n, u_m \rangle + \|u_m\|_H^2$$

und man findet

$$\|Au_n - Au_m\|_H = \|u_n - u_m\|_H = \sqrt{2} \delta_{nm}.$$

Dann hat $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, ein Widerspruch.

Bevor wir zum zweiten Punkt kommen, brauchen wir Folgendes:

Behauptung 11.6.2 *Wir behaupten, dass $c > 0$ existiert, mit*

$$\|(I - A)u\|_H \geq c \|u\|_H \text{ für } u \in N(I - A)^\perp. \quad (11.13)$$

Wenn das nicht so wäre, dann gäbe es $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ mit $\|u_n\|_H = 1$ und

$$\|(I - A)u_n\|_H \leq \frac{1}{n}. \quad (11.14)$$

Weil A kompakt ist und $\|u_n\|_H = 1$, existiert eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\{Au_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent, sagen wir $Au_{n_k} \rightarrow w_\infty \in H$. Wegen (11.14) folgt

$$\begin{aligned} & \|u_{n_k} - w_\infty\|_H \\ & \leq \|u_{n_k} - Au_{n_k}\|_H + \|Au_{n_k} - w_\infty\|_H \\ & \leq \frac{1}{n_k} + \|Au_{n_k} - w_\infty\|_H \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dann findet man via

$$\begin{aligned} & \|Aw_\infty - w_\infty\|_H \\ & \leq \|Aw_\infty - Au_{n_k}\|_H + \|Au_{n_k} - w_\infty\|_H \\ & \leq \|A\|_{H \rightarrow H} \|w_\infty - u_{n_k}\|_H + \|Au_{n_k} - w_\infty\|_H \rightarrow 0, \end{aligned}$$

dass $Aw_\infty - w_\infty = 0$. Das heißt $w_\infty \in N(I - A)$. Weil $u_{n_k} \in N(I - A)^\perp$, dieser Teilraum abgeschlossen ist, und $u_{n_k} \rightarrow w_\infty$, gilt auch $w_\infty \in N(I - A)^\perp$. Das bedeutet $w_\infty = 0$ und weil $u_{n_k} \rightarrow w_\infty$, ist dies ein Widerspruch zu $\|u_{n_k}\|_H = 1$. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Zu 2. Sei $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R(I - A)$ eine Folge mit

$$\|w_n - w\|_H \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Dann gibt es $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ mit $w_n = (I - A)u_n$. Weil $N(I - A)$ endlich dimensional ist, ist $N(I - A)$ abgeschlossen und gilt

$$H = N(I - A) \oplus N(I - A)^\perp.$$

Jedes u_n kann man dann schreiben als $u_n = u_{n,1} + u_{n,2}$ mit $u_{n,1} \in N(I - A)$ und $u_{n,2} \in N(I - A)^\perp$. Weil

$$(I - A)u_n = (I - A)u_{n,2},$$

dürfen wir annehmen, dass $u_n = u_{n,2} \in N(I - A)^\perp$. Dann gilt

$$\|w_n - w_m\|_H = \|(I - A)(u_n - u_m)\|_H \geq c \|u_n - u_m\|_H$$

und $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, Cauchy liefert Konvergenz, sagen wir $u_n \rightarrow u \in N(I - A)^\perp$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \|(I - A)u - w\|_H \\ & \leq \|(I - A)(u - u_n)\|_H + \|w_n - w\|_H \\ & \leq (1 + \|A\|_{H \rightarrow H}) \|u - u_n\|_H + \|w_n - w\|_H \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und das bedeutet $w = (I - A)u \in R(I - A)$.

Zu 3. Sei $w \in R(I - A)$. Dann gibt es $u \in H$ mit $u - Au = w$. Für alle $v \in N(I - A^*)$ gilt dann

$$\begin{aligned}\langle w, v \rangle &= \langle u, v \rangle - \langle Au, v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \langle u, A^*v \rangle \\ &= \langle u, (I - A^*)v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Also folgt $R(I - A) \subset N(I - A^*)^\perp$ und

$$R(I - A)^\perp \supset \left(N(I - A^*)^\perp \right)^\perp = N(I - A^*). \quad (11.15)$$

Sei $w \in R(I - A)^\perp$, dann gilt für alle $v \in H$, dass

$$0 = \langle w, (I - A)v \rangle = \langle (I - A^*)w, v \rangle.$$

Setzt man hier $v = (I - A^*)w$ ein, dann folgt $\|(I - A^*)w\|_H = 0$ und das bedeutet $w \in N(I - A^*)$. Also gilt auch

$$R(I - A)^\perp \subset N(I - A^*). \quad (11.16)$$

Das heißt $R(I - A)^\perp = N(I - A^*)$ und weil $R(I - A)$ abgeschlossen ist, findet man

$$R(I - A) = \left(R(I - A)^\perp \right)^\perp = N(I - A^*)^\perp.$$

Zu 4 $\implies$. Sei $N(I - A) = \{0\}$ und $R(I - A) \neq H$. Weil $H_1 := R(I - A)$ ein abgeschlossener Teilraum von H ist, ist $H_1^\perp$ nicht-trivial und es gibt $u_1 \in H_1^\perp \setminus H_1$ mit $\|u_1\|_H = 1$. Außerdem gilt

$$(I - A)H_1 \subsetneq (I - A)H = H_1.$$

Man findet $\subsetneq$, weil $(I - A)H_1 = (I - A)H$ impliziert, dass es $v \in H$ gibt mit

$$(I - A)^2 v = (I - A)u_1, \quad (11.17)$$

und weil $N(I - A) = \{0\}$, folgt $(I - A)v - u_1 = 0$, ein Widerspruch.

Der Teilraum H_1 ist wieder ein Hilbertraum und man kann das Gleiche erneut machen. Es folgt eine unendliche Kette von Teilräumen

$$H_0 := H \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots$$

und $u_n \in H_{n-1} \cap H_n^\perp$ mit $\|u_n\|_H = 1$. Für $m > n$ gilt

$$Au_n - Au_m = u_n - ((I - A)u_n - u_m - (I - A)u_m)$$

mit

$$\tilde{u}_{n,m} := (I - A)u_n - u_m - (I - A)u_m \in H_n.$$

Weil $\langle u_n, \tilde{u}_{n,m} \rangle = 0$, gibt uns das

$$\|Au_n - Au_m\|_H^2 = \|u_n\|_H^2 + \|\tilde{u}_{n,m}\|_H^2 \geq 1$$

und besagt, dass $\{Au_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ keine konvergente Teilfolge hat, obwohl A kompakt und $\|u_n\|_H$ beschränkt ist, ein Widerspruch.

Zu 4 $\longleftarrow$. Auch A^* ist kompakt. Wenn $R(I - A) = H$, dann folgt aus dem dritten Punkt, dass $N(I - A^*)^\perp = H$ und so auch $N(I - A^*) = \{0\}$. Mit dem letzten Abschnitt folgt dann

$$R(I - A^*) = H$$

und mit dem dritten Punkt

$$N(I - A)^\perp = R(I - A^*)$$

und das heißt $N(I - A) = \{0\}$.

Zu 5. Wir zeigen zuerst

$$\dim N(I - A) \geq \dim \left(R(I - A)^\perp \right). \quad (11.18)$$

Wir haben schon gezeigt, dass $\dim N(I - A)$ endlich ist. Wenn in (11.18) $<$ statt $\geq$ stehen würde, dann existiert eine lineare Abbildung $B_0 : N(I - A) \rightarrow R(I - A)^\perp$, die injektiv, jedoch nicht surjektiv ist. Definiere $B : H \rightarrow H$ via

$$H = N(I - A) \oplus N(I - A)^\perp$$

und $u_1 \in N(I - A)$, $u_2 \in N(I - A)^\perp$, durch

$$B(u_1 + u_2) = B_0(u_1). \quad (11.19)$$

Weil $R(B)$ endlich dimensional ist, ist B kompakt. Dann ist auch $A + B$ kompakt. Für $u = u_1 + u_2$, wie in (11.19), folgt

$$(I - A - B)(u_1 + u_2) = -Bu_1 + (I - A)(u_2). \quad (11.20)$$

Weil $-Bu_1 \in R(I - A)^\perp$ und $(I - A)u_2 \in R(I - A)$ mit $u_2 \in N(I - A)^\perp$ folgt aus (11.20) $= 0$, dass $u_1 = u_2 = 0$ und

$$N(I - A - B) = \{0\}.$$

Dann folgt aus dem vierten Punkt, dass $R(I - A - B) = H$. Weil B_0 nicht surjektiv ist, gibt es $v \in R(I - A)^\perp$, das nicht in $R(I - A) + R(B)$ liegt, ein Widerspruch.

Aus (11.18) folgt mit dem dritten Punkt, dass

$$\dim \left(R(I - A^*)^\perp \right) \geq \dim N(I - A^*).$$

Weil A und A^* vertauschbar sind, gilt die Gleichung. ■

Lemma 11.6.3 Sei H ein Hilbertraum und sei die lineare Abbildung $A : H \rightarrow H$ stetig und selbstadjungiert. Dann folgt:

1. Für $u \in H$ gilt $\langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$.

2. Mit

$$m_A := \inf \left\{ \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle}; u \in H \setminus \{0\} \right\},$$

$$M_A := \sup \left\{ \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle}; u \in H \setminus \{0\} \right\}$$

gilt $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$.

3. $\{m_A, M_A\} \subset \sigma(A)$.

4. Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann sind geometrische und algebraische Multiplizität gleich.

Beweis. Zu 1. Weil

$$\langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle = \overline{\langle Au, u \rangle}$$

folgt $\langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$.

Zu 2. Weil A stetig, also linear beschränkt ist, folgt mit Cauchy-Schwarz, dass

$$\left| \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \right| \leq \frac{\|Au\|_H \|u\|_H}{\|u\|_H^2} \leq \|A\|_{H \rightarrow H} < \infty.$$

Mit der ersten Aussage existiert sowohl m_A als M_A in $\mathbb{R}$ und

$$m_A \langle u, u \rangle \leq \langle Au, u \rangle \leq M_A \langle u, u \rangle$$

Für $c_A = \frac{1}{2}(M_A + m_A)$ und $r_A = \frac{1}{2}(M_A - m_A)$ gilt

$$-r_A \langle u, u \rangle \leq \langle (A - c_A) u, u \rangle \leq r_A \langle u, u \rangle. \quad (11.21)$$

Weil A selbstadjungiert ist, findet man

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \langle (A - c_A) u, v \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (A - c_A) u, v \rangle + \frac{1}{2} \langle v, (A - c_A) u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (A - c_A) u, v \rangle + \frac{1}{2} \langle (A - c_A) v, u \rangle \\ &= \langle (A - c_A) \frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2} \rangle - \langle (A - c_A) \frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2} \rangle \\ &\leq r_A \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_H^2 + r_A \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_H^2 \\ &= \frac{1}{2} r_A (\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2). \end{aligned}$$

Bei der letzten Ungleichung sind beide Ungleichungen von (11.21) benutzt worden.

Nehme anschließend an, dass $\|(A - c_A) u\|_H \neq 0$, und setze

$$v_u = \frac{\|u\|_H}{\|(A - c_A) u\|_H} (A - c_A) u.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & \|u\|_H \|(A - c_A) u\|_H \\ &= \langle (A - c_A) u, v_u \rangle = \operatorname{Re} \langle (A - c_A) u, v_u \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} r_A (\|u\|_H^2 + \|v_u\|_H^2) = r_A \|u\|_H^2 \end{aligned}$$

und

$$\|A - c_A\|_{H \rightarrow H} \leq r_A. \quad (11.22)$$

Sei nun $z \in \mathbb{C} \setminus [m_A, M_A]$ und wähle eine Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)} \subset \mathbb{C}$ mit m_A und M_A auf dem Rand und z außerhalb, wie in Abbildung 11.2. Dann gilt $z_0 = c_A + ib$ für ein

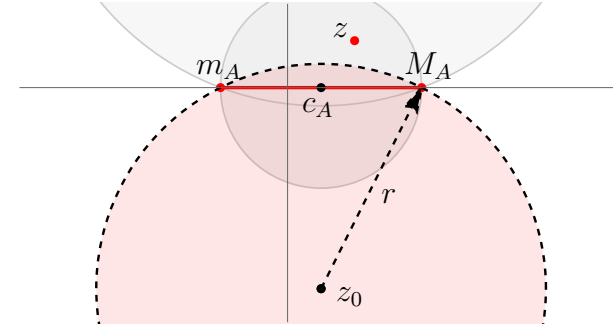


Abbildung 11.2: Die Kreisscheibe in $\mathbb{C}$

$b \in \mathbb{R}$. Aus der Selbstadjungiertheit folgt

$$\begin{aligned} & \|(A - z_0) u\|_H^2 = \\ & \|(A - c_A) u\|_H^2 + ib \langle (A - c_A) u, u \rangle - ib \langle u, (A - c_A) u \rangle + b^2 \|u\|_H^2 \\ &= \|(A - c_A) u\|_H^2 + b^2 \|u\|_H^2. \end{aligned}$$

Man findet mit (11.21) und weil $\langle (A - c_A) u, u \rangle \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} & |\langle (A - z_0) u, u \rangle| = |\langle (A - c_A) u, u \rangle - ib \langle u, u \rangle| \\ & \leq \sqrt{r_A^2 + b^2} \langle u, u \rangle = r \|u\|_H^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \|(z - A) u\|_H \|u\|_H \geq |\langle (z - A) u, u \rangle| \\ &= |(z - z_0) \|u\|_H^2 - \langle (A - z_0) u, u \rangle| \\ &\geq |z - z_0| \|u\|_H^2 - |\langle (A - z_0) u, u \rangle| \\ &\geq (|z - z_0| - r) \|u\|_H^2. \end{aligned}$$

Weil $|z - z_0| > r$, impliziert diese Ungleichung die Injektivität von $A - zI$. Die Surjektivität findet man durch die

Inverse

$$\begin{aligned}(z - A)^{-1} &= (z - z_0)^{-1} \left(1 - \frac{A - z_0}{z - z_0} \right)^{-1} \\ &= (z - z_0)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A - z_0}{z - z_0} \right)^k.\end{aligned}$$

Diese Summe konvergiert, weil aus (11.22) und (11.6) folgt, dass

$$\left\| \frac{A - z_0}{z - z_0} \right\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{r}{|z - z_0|} < 1.$$

Zu 3. Wir haben

$$\begin{aligned}\forall u \in H : \langle (M_A - A)u, u \rangle &\in [0, \infty) \text{ und} \\ \forall u, v \in H : \langle (M_A - A)u, v \rangle &= \langle u, (M_A - A)v \rangle \\ &= \overline{\langle (M_A - A)v, u \rangle},\end{aligned}$$

und so ist $(u, v) := \langle (M_A - A)u, v \rangle$ eine positiv-semidefinite, schiefsymmetrische Bilinearform. Die Sesquilinearität folgt aus der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Für solche Bilinearformen gilt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Der Beweis ist ähnlich wie bei positiv-definiten Formen.

Bemerkung 11.6.4 Sei $(\cdot, \cdot)$ eine sesquilineare, positiv-semidefinite, schiefsymmetrische Bilinearform. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $u, v \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq (u + tv, u + tv) = (u, u) + 2t \operatorname{Re}(u, v) + t^2 (v, v).$$

Wenn $(v, v) = 0$ folgt $\operatorname{Re}(u, v) = 0$. Wenn $(v, v) \neq 0$, folgt mit $t := -(v, v)^{-1} \operatorname{Re}(u, v)$, dass

$$0 \leq (u, u) - \frac{\operatorname{Re}(u, v)^2}{(v, v)}.$$

In beiden Fällen gilt

$$|\operatorname{Re}(u, v)| \leq (u, u)^{1/2} (v, v)^{1/2}.$$

Für $\varphi \in [0, 2\pi]$ derart, dass $e^{i\varphi}(u, v) \in [0, \infty)$, folgt

$$\begin{aligned}|(u, v)| &= e^{i\varphi}(u, v) = (u, e^{i\varphi}v) = \operatorname{Re}(u, e^{i\varphi}v) \\ &\leq (u, u)^{1/2} (e^{i\varphi}v, e^{i\varphi}v)^{1/2} = (u, u)^{1/2} (v, v)^{1/2}.\end{aligned}$$

Da wir also Cauchy-Schwarz verwenden dürfen, gilt

$$|\langle (M_A - A)u, v \rangle| \leq \langle (M_A - A)u, u \rangle^{1/2} \langle (M_A - A)v, v \rangle^{1/2}$$

und

$$\begin{aligned}\|(M_A - A)u\|_H &= \sup \{ |\langle (M_A - A)u, v \rangle| ; \|v\|_H = 1 \} \\ &\leq \langle (M_A - A)u, u \rangle^{1/2} \sup \left\{ \langle (M_A - A)v, v \rangle^{1/2} ; \|v\|_H = 1 \right\} \\ &= C_A \langle (M_A - A)u, u \rangle^{1/2}.\end{aligned}\tag{11.23}$$

Weil A beschränkt ist, existiert $C_A \in \mathbb{R}^+$.

Wegen der Definition von M_A gibt es eine Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in H mit $\|u_k\|_H = 1$ und

$$\langle Au_k, u_k \rangle \rightarrow M.$$

Dann folgt wegen (11.23), dass $\|(M_A - A)u_k\|_H \rightarrow 0$. Wenn $M_A \notin \sigma(A)$, dann existiert eine stetige Inverse $(M_A I - A)^{-1}$ und

$$u_k = (M_A I - A)^{-1} (M_A I - A) u_k \rightarrow 0,$$

ein Widerspruch. Ähnliches beweist man bei m_A .

Zu 4. Wenn λ ein Eigenwert ist und beide Multiplizitäten für λ nicht gleich sind, dann gibt es $u, v \in H \setminus \{0\}$ mit

$$(A - \lambda I)u = 0 \text{ und } (A - \lambda I)v = u.$$

Man findet

$$0 \neq \langle u, u \rangle = \langle (A - \lambda I)v, u \rangle = \langle v, (A - \lambda I)u \rangle = 0,$$

einen Widerspruch. ■

Theorem 11.6.5 *Sei H ein separabler Hilbertraum und sei die lineare Abbildung $A : H \rightarrow H$ kompakt und selbstadjungiert. Dann existiert ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen.*

Beweis. Seien $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ die unterschiedlichen Eigenwerte ungleich 0 und setze $\lambda_0 = 0$. Schreibe

$$H_n := N(A - \lambda_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Weil H separabel ist, hat auch jedes H_n , wenn ungleich $\{0\}$, ein höchstens abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem. Für H_0 gilt

$$0 \leq \dim(H_0) \leq \infty,$$

Mit Theorem 11.3.4 finden wir

$$0 < \dim(H_n) < \infty \text{ für } n \in \mathbb{N}^+.$$

Jede Funktion in $H_n \setminus \{0\}$ ist eine Eigenfunktion mit Eigenwert λ_n . Abzählbare und endlich dimensionale Teilräume kann man mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine vollständige orthonormale Basis geben.

Wenn $u \in H_n \setminus \{0\}$ und $v \in H_m \setminus \{0\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{\lambda_n} \langle u, v \rangle &= \langle \lambda_n u, v \rangle = \langle Au, v \rangle \\ &= \langle u, Av \rangle = \langle u, \lambda_m v \rangle = \lambda_m \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Dann folgt $\lambda_n \in \mathbb{R}$ für $n = m$ und für $n \neq m$ findet man $\langle u, v \rangle = 0$. Das letzte bedeutet

$$H_n \subset H_m^\perp \text{ für } n \neq m$$

und sorgt dafür, dass die Vereinigung der vollständigen Orthonormalsysteme von H_0 bis H_m ein vollständiges Orthonormalsystem ist für

$$\bigoplus_{k=0}^m H_k.$$

Bekommen wir so alles? Um diese Frage zu beantworten, setzen wir

$$H_E := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k$$

als den Raum aller Funktionen $u \in H$, die man schreiben kann als

$$u = \sum_{k=0}^m c_k v_k \text{ mit } v_k \in H_k, c_k \in \mathbb{C} \text{ und } m \in \mathbb{N}. \quad (11.24)$$

Wir wollen zeigen, dass $\overline{H_E} = H$.

Für u in (11.24) gilt

$$Au = \sum_{k=0}^m c_k Av_k = \sum_{k=0}^m c_k \lambda_k v_k \in H_E$$

und außerdem, wenn $w \in H_E^\perp$ und $u \in H_E$, weil

$$\langle Aw, u \rangle = \langle w, Au \rangle = 0,$$

dass auch $Aw \in H_E^\perp$.

Wir können A als kompakte, selbstadjungierte Abbildung auf $H_E^\perp$ betrachten und schreiben

$$A_\dagger := A|_{H_E^\perp}.$$

Wir finden, dass

$$A_\dagger : H_E^\perp \rightarrow H_E^\perp$$

wohl-definiert ist. Wenn $A_\dagger w = \lambda w$ für $w \in H_E^\perp \setminus \{0\}$, dann wäre w auch eine Eigenfunktion von A und es gäbe H_k mit $w \in H_k$. Für das Spektrum von $A_\dagger$ gilt also $\sigma(A_\dagger) \subset \{0\}$. Wegen Lemma 11.6.3 gilt $m_{A_\dagger} = M_{A_\dagger} = 0$ und $\sigma(A_\dagger) \supset \{0\}$. Das liefert $\langle A_\dagger u, u \rangle = 0$ für alle $u \in H_E^\perp$. Weil

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \langle A_\dagger u, v \rangle &= \langle A_\dagger u, v \rangle + \langle v, A_\dagger u \rangle = \langle A_\dagger u, v \rangle + \langle A_\dagger v, u \rangle \\ &= \langle A_\dagger (u + v), (u + v) \rangle - \langle A_\dagger u, u \rangle - \langle A_\dagger v, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

und ebenso

$$2 \operatorname{Im} \langle A_\dagger u, v \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle A_\dagger u, iv \rangle = 0,$$

folgt $\langle A_\dagger u, v \rangle = 0$ für alle $v \in H_E^\perp$ und so $A_\dagger = 0$. Das impliziert

$$H_E^\perp \subset N(A) = H_0 \subset H_E$$

und $H_E^\perp = \{0\}$. Wenn $H_E^\perp = \{0\}$, dann folgt $\overline{H_E} = H$. ■

Fourieranalysis

Existenz Fourier- ähnlicher Reihen



Kapitel 12

12.1 Funktionenräume

Wie wir im letzten Kapitel bemerkt haben, brauchen wir genau definierte Funktionenräume. Es gibt zwei Haupttypen, die punktweise definierten C^k - und Hölder-Räume als auch die Sobolev-Räume von Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit Ableitungen, die auch im Lebesgue-Raum liegen.

Wir werden beide Typen kurz vorstellen.

12.1.1 Hölder-Räume

Definition 12.1.1 Sei Ω ein beschränktes Gebiet, dann ist $(C^k(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k})$ der Raum aller k -mal stetig-differenzierbaren Funktionen $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) mit Norm, definiert durch

$$\|u\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_\infty.$$

Für $C^0(\bar{\Omega})$ schreibt man auch $C(\bar{\Omega})$.

Stetigkeit von f auf $\bar{\Omega}$, mit Ω einem Gebiet, wird definiert an der Stelle $x \in \bar{\Omega}$ durch:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \bar{\Omega} : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Für die klassische Differenzierbarkeit in der x_i -Richtung brauchen wir jedoch, um den Differenzquotienten in

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\tilde{e}_i) - f(x)}{h}$$

zu definieren, dass für $h \in (-t_0, t_0)$ mit t_0 klein aber positiv gilt

$$x + h\tilde{e}_i \in \bar{\Omega}.$$

Auf dem Rand $\partial\Omega$ ist das ein Problem. Das heißt, dass wir noch klären müssen, wie man die Ableitung auf dem Rand $\partial\Omega$ definiert. Am einfachsten ist das Folgende:

Wir sagen $\frac{\partial}{\partial x_i} u$ existiert als stetige Ableitung auf $\bar{\Omega}$, wenn

$g_i \in C(\bar{\Omega})$ existiert mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u = g_i \text{ in } \Omega.$$

Höhere Ableitungen definiert man so iterativ.

Aufgabe 12.1 Man schreibt $C^k(\Omega)$ für die auf Ω k -mal stetig differenzierbaren Funktionen. Wieso ist $\|\cdot\|_k$ hier keine Norm?

Wir brauchen auch einige Teilräume.

Definition 12.1.2 Sei Ω ein beschränktes Gebiet.

1. $C_0^k(\bar{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\bar{\Omega}); \forall |\alpha| \leq k \text{ und } x \in \partial\Omega \text{ gilt } \partial^\alpha u(x) = 0 \right\}.$
2. $C_c^\infty(\Omega) := \left\{ u \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\bar{\Omega}); \exists K \subset \Omega \text{ kompakt mit } u(x) = 0 \text{ für } x \in \Omega \setminus K \right\}.$

Wir werden in Beispiel 12.2 sehen, dass die C^k -Räume leider nicht optimal sind: $-\Delta u \in C^0(\bar{\Omega})$ impliziert nur in einer Dimension, dass $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Das heißt, dass für $u \in C^2(\bar{\Omega})$ zwar $\Delta u \in C^0(\bar{\Omega})$ folgt, aber der Rückweg nicht gilt. Für optimale Regularität braucht man die **Hölderräume** $C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ mit $\gamma \in (0, 1)$.

Definition 12.1.3 Sei $\gamma \in (0, 1]$. Man sagt $f \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, wenn $f \in C^0(\bar{\Omega})$ und

$$[f]_\gamma := \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty.$$

Der Raum $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ hat als Norm $\|\cdot\|_{0,\gamma}$, definiert durch

$$\|f\|_{0,\gamma} := \|f\|_\infty + [f]_\gamma.$$

Ähnlich werden auch Hölderräume höherer Ordnung definiert. Wenn der Rand $\partial\Omega$ genügend nett ist, sind es Banach-Räume. Wir werden diesen Ansatz nicht verfolgen. Wenn Sie interessiert sind, dann suchen Sie nach Schauder und Hölder in [7].

12.1.2 Sobolev-Räume

Für Ableitungen von Funktionen, die im Sinne von Lebesgue eigentlich Funktionenklassen sind, kann man die punktweise Definition von Ableitung so nicht verwenden. Erst müssen wir festlegen, wie man eine Ableitung definiert. Die partielle Integration bietet sich da an:

Definition 12.1.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man sagt, dass eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ eine **schwache Ableitung** $\frac{\partial}{\partial x_i} u \in L^2(\Omega)$ hat, wenn $g_i \in L^2(\Omega)$ existiert, mit

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) dx = - \int_\Omega g_i(x) \varphi(x) dx \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Im dem Fall schreibt man $\frac{\partial}{\partial x_i} u := g_i$.

Bemerkung 12.1.5 Eine schwache Ableitung ist also immer auf einer offenen Menge definiert und nicht punktweise. Wenn $f \in C^1(\Omega)$, dann gleicht die schwache Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ auf Ω die klassische Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ und ist daher eine Erweiterung.

Bemerkung 12.1.6 Iterativ kann man so auch schwache Ableitungen höherer Ordnung definieren, oder finden, dass sie auf dem Gebiet nicht existieren.

Aufgabe 12.2 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$.

1. Zeigen Sie, dass $g(x) = \text{sign}(x)$ die schwache Ableitung auf $\mathbb{R}$ ist.
2. Hat g eine schwache Ableitung auf $(-1, 1)$?

Aufgabe 12.3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$.

1. Zeigen Sie, dass $g_1(x) = \frac{x_1}{|x|}$ die schwache Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1} f$ auf $\mathbb{R}^2$ ist.
2. Hat g_1 schwache Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1} g_1$ und $\frac{\partial}{\partial x_2} g_1$ auf $B_1(0)$?

Mit Hilfe der schwachen Ableitung kann man die Sobolev-Räume definieren:

Definition 12.1.7 Sei Ω ein beschränktes Gebiet, dann ist $(W^{k,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,2}})$ der **Sobolev-Raum** aller k -mal schwach-differenzierbaren Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) mit der Norm, definiert durch

$$\|u\|_{W^{k,2}} := \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha u(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Weil solche Funktionen nur Funktionenklassen darstellen, kann man eine solche Funktion auf einer Nullmenge ändern, ohne dass man die Klasse verlässt. Der Rand $\partial\Omega$ von einem Gebiet Ω mit $\partial\Omega \in C^1$, siehe die Fußnote auf Seite 108, ist eine Nullmenge. Das heißt jedoch nicht, dass man nicht einen Randwert definieren kann. Ohne Beweis geben wir das Ergebnis:

Theorem 12.1.8 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1 -Rand. Dann gilt Folgendes für jedes $u \in W^{1,2}(\Omega)$:

1. Es gibt eine Folge $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^1(\bar{\Omega})$ mit

$$\|u - u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty. \quad (12.1)$$

2. Wenn eine Folge $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^1(\bar{\Omega})$ nach u konvergiert wie in (12.1), dann gibt es $v \in L^2(\partial\Omega)$ derart, dass

$$\|v - u_m\|_{L^2(\partial\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty. \quad (12.2)$$

3. Dieses v hängt nicht ab von der Folge $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, sondern nur von u und damit ist der **Spuoperator**

$$T : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \quad (12.3)$$

wohl-definiert.

4. T in (12.3) ist ein beschränkter linearer Operator.
5. Wenn $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, dann gilt $(Tu)(x) = u(x)$ fast überall auf $\partial\Omega$.

Bemerkung 12.1.9 In (12.2) steht die Einschränkung von u_m auf $\partial\Omega$ und die ist wohl-definiert, weil u_m stetig auf $\bar{\Omega}$ ist.

Bemerkung 12.1.10 Wenn $u \in W^{k,2}(\Omega)$ kann man also einen Randwert $u \in W^{k-1,2}(\partial\Omega)$ festlegen. Man kann jedoch nicht für die höchste Ordnung k den Randwert bestimmen, wie bei $C^k(\bar{\Omega})$.

Definition 12.1.11 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Man definiert

$$W_0^{k,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,2}(\Omega)}}.$$

Theorem 12.1.12 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und sei T der Spuoperator aus (12.3). Dann gilt:

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega); Tu = 0\}.$$

12.2 Das Lösen des Dirichlet-Laplace-Problems auf $B_1(0)$

In diesem Abschnitt wird gelten $\Omega = B_1(0)$. Wir formulieren das Problem schon für Ω , ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Mit dem Dirichlet-Laplace-Problem ist Folgendes gemeint:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.4)$$

Die Randbedingung $u = 0$ ist nach Dirichlet¹ benannt. Eine explizite Lösungsformel ist nur in seltenen Fällen bekannt.

Theorem 12.2.1 Wenn $\Omega = B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$, dann findet man eine Lösung von (12.4) durch

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G_n(x, y) f(y) dy. \quad (12.5)$$

Die Greensche Funktion ist definiert für $n = 2$ durch

$$G_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|x| |y| - \frac{1}{|y|} |y|}{|x - y|} \right),$$

¹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859

und für $n \geq 3$:

$$G_n(x, y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left(|x - y|^{2-n} - \left| x |y| - \frac{1}{|y|} y \right|^{2-n} \right)$$

mit $\omega_n = |\mathbb{S}^{n-1}| := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1 d\sigma$.

Wenn $f \in C^1(\overline{B_1(0)})$, dann kann man zeigen, dass $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ eine Lösung ist von (12.4). Man kann sogar zeigen, dass $f \in L^2(B_1(0))$ eine Funktion $u \in W^{2,2}(B_1(0))$ liefert, die zwar keine punktweise definierte Lösung von (12.4) ist, jedoch $-\Delta u = f$ als Gleichung in $L^2(\Omega)$ und die Randbedingung im Sinne von $Tu = 0$, mit Spuoperator T , in $L^2(\partial\Omega)$ erfüllt.

Schreibt man für (12.5)

$$u = \mathcal{G}_n f,$$

dann kann man $\mathcal{G}_n$ auffassen als lineare Abbildung oder Lösungsoperator. Zum Beispiel als

$$\mathcal{G}_{n,1} : C^1(\overline{B_1(0)}) \rightarrow C^2(\overline{B_1(0)}) \quad (12.6)$$

oder

$$\mathcal{G}_{n,2} : L^2(B_1(0)) \rightarrow W^{2,2}(B_1(0)). \quad (12.7)$$

Man kann sogar zeigen, dass beide Operatoren nicht nur linear beschränkt sind, sondern wie folgt abbilden:

$$\mathcal{G}_{n,1} \left(C^1(\overline{B_1(0)}) \right) \subset C^2(\overline{B_1(0)}) \cap C_0(\overline{B_1(0)})$$

und

$$\mathcal{G}_{n,2} \left(L^2(B_1(0)) \right) \subset W^{2,2}(B_1(0)) \cap W_0^{1,2}(B_1(0))$$

Definition 12.2.2 Eine **Einbettung** ist eine beschränkte, lineare Abbildung $\mathcal{E} : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$, die ein Element von V nicht ändert, sondern nur als Teil eines größeren Vektorraums auffasst.

Bemerkung 12.2.3 Im Falle, dass man einen Vektorraum von Funktionenklassen betrachtet, ist es zugelassen, aus jeder Funktionenklasse eine spezielle Funktion zu wählen.

Lemma 12.2.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und zwar derart, dass

$$\mathcal{G}_{n,1} : C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow C^2(\bar{\Omega}),$$

ein stetiger Lösungoperator ist. Mit den Einbettungen

$$\mathcal{E}_1 : C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow C^1(\bar{\Omega}),$$

ist die Abbildung

$$\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{G}_{n,1} : C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow C^1(\bar{\Omega}),$$

kompakt.

Beweis. Wegen des Satzes von Arzelà-Ascoli ist die Einbettung

$$\mathcal{E} : (C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1}) \rightarrow (C^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{\infty})$$

kompakt. Ähnlich kann man zeigen, dass $\mathcal{E}_1$ eine kompakte lineare Abbildung ist. Die Zusammenstellung einer kompakten und einer stetigen linearen Abbildung ist kompakt. ■

Beispiel 12.1 Wir haben $W^{1,2}(\Omega)$ definiert als der Vektorraum der Funktion(en) $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|u\|_{W^{1,2}} := \int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx < \infty.$$

Dann gibt es die Einbettung

$$(W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,2}}) \rightarrow (L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2}).$$

Überraschender ist vielleicht, dass es für das eindimensionale $[a, b]$ auch die folgende Einbettung gibt:

$$(W^{1,2}(a, b), \|\cdot\|_{W^{1,2}}) \rightarrow (C^0[a, b], \|\cdot\|_{\infty}).$$

Es gilt nämlich, dass

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \left| \int_x^y u'(s) ds \right| \leq \int_x^y |u'(s)| ds \\ &\leq \left(\int_x^y |u'(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_x^y 1^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \sqrt{|x - y|}. \end{aligned}$$

Dann gilt, dass $u \in W^{1,2}(a, b)$ auch stetig ist und außerdem gilt

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \|u'\|_{L^2} \sqrt{|x - y|}$$

und

$$\begin{aligned} (b - a) |u(x)| &= \int_a^b |u(y)| dy + \|u'\|_{L^2} \int_a^b \sqrt{|x - y|} dy \\ &\leq \sqrt{b - a} \|u\|_{L^2} + \frac{2}{3} |b - a|^{3/2} \|u'\|_{L^2} \\ &\leq \left(\sqrt{b - a} + \frac{2}{3} |b - a|^{3/2} \right) \|u\|_{W^{1,2}} \end{aligned}$$

Das gibt uns

$$\|u\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{b - a}} + \frac{3}{2} \sqrt{b - a} \right) \|u\|_{W^{1,2}}.$$

Man soll sich hier jedoch bewusst sein, dass $u \in W^{1,2}(a, b)$ eine Äquivalenzklasse darstellt, während $u \in C[a, b]$ eine punktweise definierte Funktion ist. Genau wäre es, wenn man sagen würde, dass es in der Äquivalenzklasse von $W^{1,2}(a, b)$ einen stetigen Vertreter gibt. $\square$

Wir brauchen für die restliche Theorie zwei Räume, wobei der Lösungsoperator eine Bijektion darstellt. Leicht wäre es in einer Dimension, wo man

$$\mathcal{G}_1 : C[-1, 1] \rightarrow C^2[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$$

nehmen kann. Leider gilt so etwas nicht für C -Räume in Dimensionen $n > 1$.

Beispiel 12.2 In diesem Beispiel findet man eine stetige Funktion f mit einer Lösung u , die nicht zweimal stetig differenzierbar ist. Sei $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$.

Betrachte die Funktion $f \in C^0(\overline{B_1(0)})$, definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{4xy(2\log(x^2+y^2)-3)}{(x^2+y^2)(\log(x^2+y^2)-1)^2} & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Weil $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ und es sonst keine Problemstellen gibt, ist diese Funktion f stetig auf $\overline{B_1(0)}$.

Man kann durch Rechnen zeigen, dass für dieses f die folgende Funktion eine Lösung ist von (12.4) mit $\Omega = B_1(0)$:

$$u(x, y) = xy \log(1 - \log(x^2 + y^2)).$$

Man kann auch zeigen, dass diese Lösung eindeutig ist in $W^{2,2}(B_1(0)) \cap W_0^{1,2}(B_1(0))$.

Man findet jedoch auch

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = \log(1 - \log(x^2 + y^2)) + \frac{2(x^4 + y^4) \log(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2 (\log(x^2 + y^2) - 1)^2}$$

und weil

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u(x^2 + y^2) = \infty,$$

ist u also nicht zweimal stetig differenzierbar. Skizzen zu f , u und u_{xy} finden Sie in Abbildung 12.1.

Die Rechnerei zu u , die Ableitungen und f , kann man kontrollieren; die Tatsache zu beweisen, dass es die einzige Lösung ist, wird etwas schwieriger:

Die Funktion u ist derart, dass $u \in C^1(\overline{B_1(0)})$ und

$$u_{xx}(x, y) = u_{yy}(x, y) = -\frac{1}{2}f(x, y) \in C^0(\overline{B_1(0)}).$$

Weil auch die schwache Ableitung u_{xy} auf $B_1(0)$ existiert und in $L^2(B_1(0))$ liegt, gilt $u \in W^{2,2}(B_1(0)) \cap W_0^{1,2}(B_1(0))$. Das heißt, für alle $w \in L^2(B_1(0))$ gilt

$$\int_{B_1(0)} (-\Delta u(x, y) - f(x, y)) w(x, y) dx dy = 0.$$

Bis hier gibt es keine Probleme. Nehmen wir an, es gibt noch eine andere Lösung $\tilde{u} \in W^{2,2}(B_1(0)) \cap W_0^{1,2}(B_1(0))$, also folgt

$$\int_{B_1(0)} (-\Delta u(x, y) + \Delta \tilde{u}(x, y)) w(x, y) dx dy = 0. \quad (12.8)$$

Wir haben nicht gezeigt, dass man mit solchen Funktionen Integralrechnungen anstellen kann wie für punktweise definierte

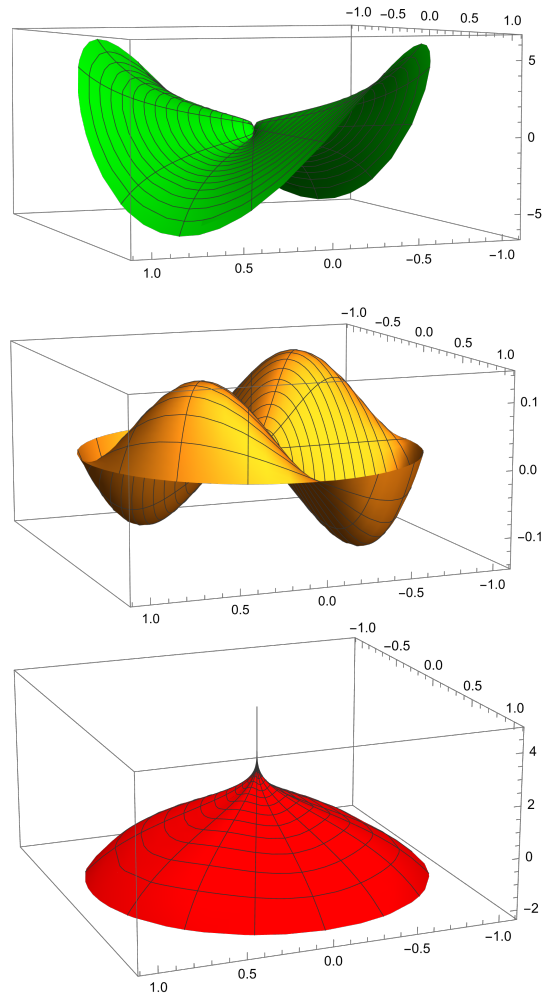


Abbildung 12.1: Skizze von f in grün, u in gold und u_{xy} in rot (insofern es im Bild passt)

Funktionen. Nehmen wir an, wir können bei (12.8) partiell integrieren mit dem Satz von Gauß für $w = u - \tilde{u}$. Dann finden wir

$$\int_{B_1(0)} |\nabla (u(x, y) - \tilde{u}(x, y))|^2 dx dy = 0.$$

Weil $|\nabla (u(x, y) - \tilde{u}(x, y))| = 0$ auf $B_1(0)$ als schwache Ableitung gilt, folgt hoffentlich

$$u(x, y) - \tilde{u}(x, y) = c \text{ auf } B_1(0).$$

Weil u und $\tilde{u}$ beide auf dem Rand gleich 0 sind, folgt in dem Fall $c = 0$. Dies kann man begründen mit dem Spuroperator. Mit $u = \tilde{u}$ gäbe es nur eine solche Lösung. $\square$

12.3 Das Lösen des Dirichlet-Laplace-Problems auf Ω

Wir werden das folgende Ergebnis verwenden ohne Beweis. Man findet das Ergebnis bewiesen in [7] und [5].

Theorem 12.3.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Dann gilt:

1. Für jedes $f \in L^2(\Omega)$ existiert eine Funktion

$$u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \quad (12.9)$$

mit $-\Delta u = f$.

2. Für jedes $f \in L^2(\Omega)$ gibt es höchstens eine Funktion u mit $-\Delta u = f$, die (12.9) erfüllt.

Damit ist der Lösungsoperator

$$\mathcal{G} : L^2(\Omega) \rightarrow W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega), \quad (12.10)$$

also $u = \mathcal{G}f$, wohl-definiert.

3. Dieser $\mathcal{G}$ ist eine beschränkte lineare Abbildung.

Theorem 12.3.2 (Rellich²) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist die Einbettung

$$\mathcal{E} : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (12.11)$$

eine kompakte, lineare Abbildung.

Dann ist auch die Einbettung

$$\mathcal{E} : W^{2,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (12.12)$$

eine kompakte, lineare Abbildung.

Bemerkung 12.3.3 Rellich hat diesen Satz 1930 bewiesen in [9]. Ein allgemeineres Ergebnis für Sobolev-Räume ist bekannt geworden als der Satz von Rellich-Kondrachov und diesen findet man zum Beispiel in [5]. Die Quelle für Einbettungen bei Sobolev-Räumen ist [1]. Da findet man nicht nur Einbettungen zwischen Sobolev-Räumen, sondern auch zum Beispiel die Folgende von einem Sobolev-Raum in einen Hölder-Raum:

Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist und $\partial\Omega$ genügend regulär, dann ist für $k - \frac{n}{p} > m + \gamma$ die Abbildung

$$\mathcal{E} : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$$

eine Einbettung.

²Franz Rellich, 1906-1955

²Vladimir Iosifovich Kondrashov, 1909-1971

Korollar 12.3.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$ und seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{E}$ wie in (12.10) und (12.12). Dann hat

$$\mathcal{E} \circ \mathcal{G} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

abzählbar viele Eigenwerte $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$. Außerdem gilt:

1. Alle Eigenwerte liegen in $\mathbb{R}^+$, haben endliche Multiplizität und die algebraische Multiplizität gleicht jeweils der geometrischen Multiplizität.

2. Man kann die Eigenwerte ordnen:

$$0 < \dots \leq \lambda_{k+1} \leq \lambda_k \leq \dots \leq \lambda_1.$$

3. 0 ist der einzige Häufungswert.

4. Es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen von $\mathcal{E} \circ \mathcal{G}$ für $L^2(\Omega)$.

Beweis. Seien $f, g \in L^2(\Omega)$ und setze $u = \mathcal{G}f$ und $v = \mathcal{G}g$. Dann gilt mit Green

$$\langle (\mathcal{E} \circ \mathcal{G}) f, g \rangle = \langle u, -\Delta v \rangle = \langle -\Delta u, v \rangle = \langle f, (\mathcal{E} \circ \mathcal{G}) g \rangle$$

Dann ist $\mathcal{E} \circ \mathcal{G}$ beschränkt und symmetrisch (und dann auch selbstadjungiert) und hat daher abzählbar viele Eigenwerte $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ mit 0 als einzigem Häufungspunkt. Mit Gauß folgt

$$\langle (\mathcal{E} \circ \mathcal{G}) f, f \rangle = \langle u, -\Delta u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0.$$

Lemma 11.6.3 zeigt $\sigma(\mathcal{E} \circ \mathcal{G}) \subset [0, \|\mathcal{E} \circ \mathcal{G}\|]$ mit

$$\|\mathcal{E} \circ \mathcal{G}\| := \sup \left\{ \|(\mathcal{E} \circ \mathcal{G}) f\|_{L^2(\Omega)} ; \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

und dass es nur Eigenwerte geben kann mit der algebraischen Multiplizität gleich der geometrischen. Theorem 11.6.5 zeigt den Rest. ■

Für diejenigen, die an partiellen Differentialgleichungen interessiert sind, wird das Eigenwertproblem meistens wie folgt geschrieben:

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.13)$$

Man soll bemerken, dass (u_k, μ_k) Eigenfunktion/Eigenwert von (12.13) ist, mal abgesehen von Regularitätsfragen, genau dann, wenn

$$(\mathcal{E} \circ \mathcal{G}) u_k = \mu_k^{-1} u_k.$$

Wenn die Rede ist von Eigenwerten, soll man sich also verge-wissern, ob μ_k oder $\lambda_k = \mu_k^{-1}$ gemeint ist.

Wenn wir das Ergebnis aus diesem Abschnitt übersetzen nach

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.14)$$

mit Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand, dann kann man dieses Problem lösen für $f \in L^2(\Omega)$ und alle

$$\mu \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}^+}.$$

Korollar 12.3.5 Sei $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ das vollständige Orthonormal-system von Eigenfunktionen von $\mathcal{E} \circ \mathcal{G}$ aus Korollar 12.3.4 mit $(\mathcal{E} \circ \mathcal{G}) \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$. Dann gilt für $f \in L^2(\Omega)$, dass

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k$$

und, wenn $\mu \notin \{\lambda_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}^+}$, für die Lösung $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, dass

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{\langle \varphi_k, f \rangle}{\lambda_k^{-1} - \mu} \varphi_k.$$

Beweis. Wenn $\mu \neq \lambda_k^{-1}$, findet man für $f = \varphi_k$, dass $u = (\lambda_k^{-1} - \mu)^{-1} \varphi_k$. Der Rest folgt aus der Vollständigkeit von $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ und der Linearität des Problems. ■

Die Eigenfunktionen $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ liegen in $L^2(\Omega)$. Wenn der Rand von Gebiet $C^{2,\gamma}$ ist, dann ist die Lösung $u = \lambda_k \varphi_k$ von

$$\begin{cases} -\Delta u = \varphi_k & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.15)$$

in $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Das bedeutet, dass φ_k mehr Regularität hat als nur $L^2(\Omega)$. Mit der Theorie, die in [7] und [5] erklärt wird, findet man sogar, dass $\varphi_k \in C^{2,\tilde{\gamma}}(\bar{\Omega})$ für $\tilde{\gamma} \in (0, \gamma)$.

12.4 Der erste Eigenwert

Die Eigenfunktion, die zu dem kleinsten Eigenwert $\mu_1 = \lambda_1^{-1}$ gehört, hat eine besondere Eigenschaft, nämlich, dass Positivität erhalten bleibt:

$$f \geq 0 \implies u \geq 0.$$

Betrachten wir

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.16)$$

Wenn die Funktionen u , f und Δu alle in $C^0(\bar{\Omega})$ liegen würden und es gäbe ein negatives Minimum für u , dann findet man einen Widerspruch. Sei $\Omega \subset B_{R/2}(0)$ und sagen wir $u(x_0) = -m < 0$, dann betrachtet man die Funktion

$$v(x) = u(x) + \frac{m}{2} \left(1 - \frac{|x - x_0|^2}{R^2} \right). \quad (12.17)$$

Siehe Abbildung 12.2.

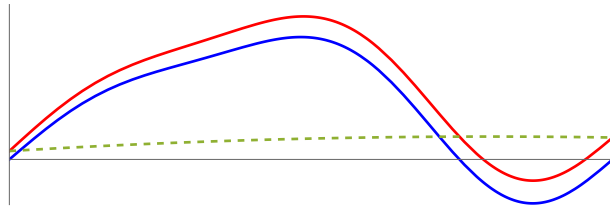


Abbildung 12.2: u in blau und v aus (12.17) in rot

Weil $\Omega \subset B_{R/2}(0) \subset B_R(x_0)$ gilt $v(x) > u(x)$ für $x \in \Omega$. Die Funktion v hat jedoch immer noch ein negatives Minimum, denn $v(x_0) = -\frac{1}{2}m < 0$ und auf dem Rand gilt $v(x) > u(x) = 0$. In dem Minimum x_* von v gilt jedoch

$$-\Delta v(x_*) = -\Delta u(x_*) + \frac{mn}{R^2} = f(x_*) + \frac{mn}{R^2} \geq \frac{mn}{R^2} > 0$$

und mindestens eine der zweiten Ableitungen ist negativ. Dann kann es kein Minimum sein.

Theorem 12.4.1 (Maximumprinzip) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$. Sei $\mu \leq 0$ und

$$-\Delta u(x) \geq \mu u(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Dann gilt $u(x) \geq 0$ in Ω .

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ derart, dass $u(x_0) < 0$. Weil u stetig ist auf $\bar{\Omega}$, gibt es ein zusammenhängendes Gebiet $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $u(x) < 0$ in Ω_0 und $u(x) = 0$ auf $\partial\Omega_0$. Man findet

$$-\Delta u(x) \geq \mu u(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega_0.$$

Auf Ω_0 wendet man die Argumente von vorher an. ■

Theorem 12.4.2 (Starkes Maximumprinzip) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$. Sei $\mu \leq 0$ und

$$\begin{aligned} \text{für alle } x \in \Omega \text{ gilt: } & -\Delta u(x) - \mu u(x) \geq 0, \\ \text{es gibt } x \in \Omega \text{ mit: } & -\Delta u(x) - \mu u(x) > 0. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \Omega$, dass

$$u(x) > 0. \quad (12.18)$$

Bemerkung 12.4.3 Mit den gleichen Bedingungen wie im Theorem, kann man sogar zeigen, dass es für jedes $r > 0$ ein $c_{r,u} > 0$ gibt derart, dass für jede Kugel $B_r(x_0) \subset \Omega$ gilt

$$u(x) \geq c_{r,u} (r^2 - |x - x_0|^2) \text{ für } x \in \overline{B_r(x_0)}. \quad (12.19)$$

Wenn $\partial\Omega \in C^2$, dann kann man Ω füllen mit Kugeln fester Größe und findet $\tilde{c}_{r,u} > 0$ mit

$$u(x) \geq \tilde{c}_{r,u} d(x, \partial\Omega). \quad (12.20)$$

Hier ist $d(\cdot, \partial\Omega)$ die **Distanz zum Rand**:

$$d(x, \partial\Omega) := \min \{|x - y|; y \in \partial\Omega\}.$$

Beweis. Aus dem Maximumprinzip folgt, dass $u(x) \geq 0$. Im ersten Schritt werden wir zeigen, dass

$$u(x) > 0 \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Weil u nicht identisch 0 sein kann folgt, dass es $x_* \in \Omega$ gibt mit $u(x_*) > 0$. Nehme an, es gibt auch $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = 0$. Weil Ω als Gebiet zusammenhängend ist, gibt es einen Weg von x_0 nach x_* innerhalb von Ω und wir können auf diesem Weg eine Stelle x_I finden mit $u(x_I) > 0$ und derart, dass für ein $r > 0$ gilt:

1. $u(x) > 0$ für alle $B_{2r}(x_I)$;
2. $u(x_{II}) = 0$ für ein $x_{II} \in \partial B_{2r}(x_I)$;
3. $B_{3r}(x_I) \subset \Omega$.

Nehme

$$x_{III} = \frac{1}{2}(x_I + x_{II})$$

und betrachte die Funktion v , definiert durch

$$v(x) := u(x) + \varepsilon w(x - x_{III})$$

mit

$$\begin{cases} w(x) := \ln(|x|/r) & \text{für } n = 2, \\ w(x) := |x|^{2-n} - r^{2-n} & \text{für } n \geq 3. \end{cases} \quad (12.21)$$

Bemerke, dass $\Delta w(x) = 0$ für $|x| > 0$. Die Funktion v hat eine Singularität in x_{III} , ist jedoch stetig auf $B_{r/2}(x_{II})$.

Wir wollen das Maximumprinzip anwenden bei v auf $B_{r/2}(x_{II})$ (die grüne Scheibe in Abbildung 12.3). Auf $B_r(x_{II})$ (die rote Scheibe von Abbildung 12.3) ist der Zusatz nach ε in (12.21) genau negativ.

Den Rand $\partial B_{r/2}(x_{II})$ kann man in 3 Teilen anschauen:

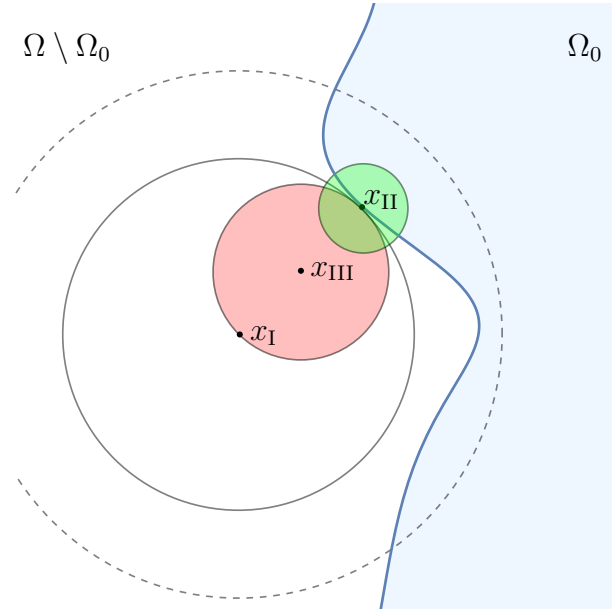


Abbildung 12.3: Zum Beweis des starken Maximumprinzips mit $\Omega_0 = \{x \in \Omega; u(x) = 0\}$

1. Für $x \in \partial B_{r/2}(x_{II}) \cap \Omega_0$ gilt $u(x) = 0$ und $w(x - x_{III}) > 0$. Also für alle $\varepsilon > 0$ findet man $v(x) > 0$.
2. Für $x \in \partial B_{r/2}(x_{II}) \cap B_{r/2}(x_{III})$ gilt $u(x) \geq c > 0$ und hier kann man $\varepsilon > 0$ so wählen, dass $v(x) \geq \frac{1}{2}c > 0$.
3. Auf dem Rest von $\partial B_{r/2}(x_{II})$ gilt $u(x) \geq 0$ und $w(x - x_{III}) > 0$ und mindestens eine der beiden Funktionen ist strikt positiv.

Für ein solches $\varepsilon > 0$ folgt

$$m_0 := \min_{x \in \partial B_{r/2}(x_{II})} v(x) > 0.$$

Wir finden jedoch auch, dass für $x \in \overline{B_{r/2}(x_{\text{II}})}$ gilt

$$-\Delta v(x) = -\Delta u(x) - \varepsilon \Delta w(x - x_{\text{III}}) = -\Delta u(x) \geq 0.$$

Weil

$$v(x_{\text{II}}) = u(x_{\text{II}}) + \varepsilon w(x_{\text{II}} - x_{\text{III}}) = 0 < m_0$$

hat v ein Minimum kleiner m_0 auf $B_{r/2}(x_{\text{II}})$ und das ist ein Widerspruch zum Maximumprinzip. ■

Der Beweis des Maximumprinzips ist nicht direkt für unsere Lösung anwendbar. Wie definiert man, dass eine nicht punktweise bestimmte Funktion negativ ist? Wenn gilt, dass $u \leq -c < 0$ f.ü. auf Ω_1 offen, dann kann man das punktweise Argument indirekt verwenden. Die Details sind leider nicht trivial. Eine grobe Skizze des Arguments ist wie folgt: Man nimmt den Friedrichs'schen Glätter und betrachtet $\varphi_\varepsilon * u$. Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ mit ε_0 genügend klein, dass es $x_0 \in \Omega$ und $m > 0$ gibt mit $(\varphi_\varepsilon * u)(x_0) < -m$, während $(\varphi_\varepsilon * u)(x) > -\frac{1}{2}m$ für x in der Nähe von $\partial\Omega$. Man setzt

$$v_\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon * u)(x) + \frac{m}{2} \left(1 - \frac{|x - x_0|^2}{R^2} \right).$$

Innerhalb von Ω und weg vom Rand gilt dann Folgendes:

$$-\Delta v_\varepsilon(x) = -(\varphi_\varepsilon * \Delta u)(x) + \frac{mn}{R^2} = (\varphi_\varepsilon * f)(x) + \frac{mn}{R^2}.$$

Im Minimum von v_ε folgt der Widerspruch wie vorher.

Theorem 12.4.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $u \in H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$. Sei $\mu \leq 0$ und $f \in L^2(\Omega)$ derart, dass

$$-\Delta u = \mu u + f \quad \text{in } \Omega.$$

Wenn $f \geq 0$ in Ω , dann gilt auch $u \geq 0$ in Ω .

Bemerkung 12.4.5 Hier sind die Ungleichungen jeweils im „fast überall Sinne“ gemeint. Wenn $u \in C(\bar{\Omega})$ und $f \geq 0$ nicht in der 0-Äquivalenzklasse liegt, dann folgt $0 \neq u \geq 0$. Dann kann auch die Lösung u nicht in der 0-Äquivalenzklasse liegen. Man kann sogar zeigen, dass in dem Fall $u(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$.

Definition 12.4.6 Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und sei $A : V \rightarrow V$ ein stetiger linearer Operator. Der Spektralradius $r(A)$ von A wird definiert durch

$$r(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|_{V \rightarrow V}}.$$

Bemerkung 12.4.7 Weil A stetig ist, ist die Operatornorm $\|A\|_{V \rightarrow V}$ von A beschränkt und so folgt aus

$$\|A^n\|_{V \rightarrow V} \leq \|A\|_{V \rightarrow V}^n,$$

dass $r(A) \leq \|A\|_{V \rightarrow V}$.

Lemma 12.4.8 Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und sei $A : V \rightarrow V$ ein stetiger linearer Operator. Dann ist $A - zI$ invertierbar für $|z| > r(A)$.

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < |z| - r(A)$. Wir können $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß nehmen, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\sqrt[n]{\|A^n\|_{V \rightarrow V}} \leq r(A) + \varepsilon.$$

Dann konvergiert der Operator

$$(I - z^{-1}A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1}A)^n$$

und das bedeutet, $(A - zI)^{-1} = -z^{-1}(I - z^{-1}A)^{-1}$ existiert. ■

Schreiben wir $u = \mathcal{G}f$ für die Lösung von (12.16) in $H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$, wenn $f \in L^2(\Omega)$. Dann können wir, für bestimmte μ jedenfalls, auch die Lösung in $H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$ von

$$-\Delta u = \mu u + f \quad \text{in } \Omega \quad (12.22)$$

finden. Hier gilt

$$u = \mu \mathcal{G} \circ \mathcal{E} u + \mathcal{G} f$$

und dann auch

$$(I - \mu \mathcal{G} \circ \mathcal{E}) u = \mathcal{G} f.$$

Wenn $|\mu| < \lambda_1^{-1}$, dann ist $(I - \mu \mathcal{G} \circ \mathcal{E}) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ invertierbar und es gilt

$$(I - \mu \mathcal{G} \circ \mathcal{E})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu \mathcal{G} \circ \mathcal{E})^k.$$

Weil für $f \geq 0$ folgt, dass $\mathcal{G}f \geq 0$, finden wir für $\mu \in [0, \lambda_1^{-1})$, dass auch

$$(I - \mu \mathcal{G} \circ \mathcal{E})^{-1} f \geq 0. \quad (12.23)$$

Hier ist der Spektralradius gleich dem ersten Eigenwert.

Korollar 12.4.9 Die Aussage von Theorem 12.4.4 gilt sogar für $\mu < \mu_1$.

Aus dem letzten Paragraph wissen wir, dass es für $L^2(\Omega)$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ gibt. Eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ kann man schreiben als

$$f = \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k$$

und die Lösung von (12.22) wird für $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wie folgt:

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{\langle \varphi_k, f \rangle}{\mu_k - \mu} \varphi_k.$$

Wenn $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m < \mu_{m+1}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \uparrow \mu_1} (\mu_1 - \mu) u &= \\ \lim_{\mu \uparrow \mu_1} \left(\sum_{k=1}^m \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_k - \mu} \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k \right) &= \\ &= \sum_{k=1}^m \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k. \end{aligned}$$

Für $0 \neq f \geq 0$ gilt wegen des Maximumprinzips, dass

$$(\mu_1 - \mu) u > 0 \quad \text{für } \mu < \mu_1.$$

Das bedeutet

$$\sum_{k=1}^m \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k \geq 0 \quad (12.24)$$

und gibt eine positive Eigenfunktion bei μ_1 , nämlich die normalisierte Linearkombination in (12.24). Diese Linearkombination ist ungleich 0 und deshalb mit dem starken Maximumprinzip sogar positiv in Ω .

Theorem 12.4.10 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$ und sei $u \in H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$ derart, dass

$$-\Delta u = \mu u + f \quad \text{in } \Omega. \quad (12.25)$$

Sei $\mu_1 = \mu_{1,\Omega} > 0$ der erste Eigenwert und sei $\varphi_1 \in H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$ eine Eigenfunktion, also

$$-\Delta \varphi_1 = \mu_1 \varphi_1 \text{ in } \Omega.$$

Dann gilt:

1. Wenn $\mu < \mu_1$ und $f \geq 0$, dann folgt $u \geq 0$.
2. Es gibt eine Eigenfunktion φ_1 für μ_1 mit festem Vorzeichen.
3. Für $\mu \geq \mu_1$ und $0 \neq f \geq 0$ gibt es keine Lösung $u \geq 0$.

Bemerkung 12.4.11 Wenn $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$, dann gilt wegen des starken Maximumprinzips für jedes $f \in C(\bar{\Omega})$ mit $0 \neq f \geq 0$, dass es $c_f > 0$ gibt derart, dass für die Lösung $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ von $-\Delta u = f$ die folgende Abschätzung gilt

$$u(x) \geq c_f d(x, \partial\Omega) \text{ für } x \in \Omega$$

also auch für $\varphi_1 \geq 0$. Für $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$ liegen alle Eigenfunktionen in $C^2(\bar{\Omega})$ und das bedeutet, dass es $c_k \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|\varphi_k(x)| \leq \tilde{c}_k d(x, \partial\Omega).$$

Dann gibt es eine positive Konstante c mit

$$0 \leq \varphi_1(x) - c\varphi_2(x).$$

Nehme $f = \varphi_1(x) - c\varphi_2(x)$ und weil $u = \mu_1^{-1}\varphi_1 - c\mu_2^{-1}\varphi_2$, folgt ein Widerspruch wenn $\mu_1 = \mu_2$. Die Multiplizität von μ_1 ist also 1.

Für die einfache Multiplizität der ersten Eigenfunktion braucht es nicht unbedingt $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$. Für beliebige Gebiete ohne irgendwelche Annahmen bezüglich Rand oder Lösungsraum, kenne ich jedoch keinen Beweis.

Beweis. Zu 1. Dies folgt aus (12.23).

Zu 2. Auch wenn die Multiplizität von μ_1 größer 1 wäre, sagen wir

$$\mu_1 = \dots = \mu_k < \mu_{k+1},$$

dann gibt es noch eine positive Eigenfunktion. Es folgt wegen (12.23), dass für die Lösung u_μ von (12.25) gilt, dass $u_\mu > 0$. Weil

$$\lim_{\mu \uparrow \mu_1} (\mu_1 - \mu) u_\mu = \sum_{n=1}^k \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k > 0,$$

gibt es eine Linearkombination von ersten Eigenfunktionen, die positiv ist:

$$\tilde{\varphi}_1 := \frac{\sum_{n=1}^k \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k}{\left\| \sum_{n=1}^k \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k \right\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Zu 3. Nennen wir die positive Eigenfunktion wieder φ_1 . Wenn $0 \neq f \geq 0$, $\mu \geq \mu_1$ und $u \geq 0$, dann folgt

$$0 \geq (\mu - \mu_1) \langle \varphi_1, f \rangle = \langle \varphi_1, u \rangle \geq 0.$$

Das bedeutet $\langle \varphi_1, u \rangle = 0$ und mit $u \geq 0$ ergibt das $u = 0$. Dies kann keine Lösung sein für ein nicht triviales f . ■

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die positive erste Eigenfunktion zu approximieren:

- Sei $\mathcal{G} : L^2(\Omega) \rightarrow W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ der Lösungsoperator für (12.16). Sei $0 \leq u_0 \in L^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Definiere iterativ die Folge

$$u_{n+1} := \|\mathcal{G}u_n\|_{L^2(\Omega)}^{-1} \mathcal{G}u_n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es $0 \leq u_\infty \in L^2(\Omega)$ mit $\|u_\infty - u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$\mathcal{G}u_\infty = \lambda_1 u_\infty.$$

Kennt man den ersten Eigenwert schon, dann kann man auch die Folge

$$u_{n+1} = \mu_1 \mathcal{G}u_n \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

betrachten.

- Mit Hilfe der **Ungleichung von Barta**:

In [3] findet man, dass für jede Funktion $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $u(x) > 0$ auf Ω die folgende Ungleichung gilt:

$$\mu_1 \geq B_u := \inf \left\{ \frac{-\Delta u(x)}{u(x)}; x \in \Omega \right\}$$

Nimmt man $u = \varphi_1$, mit φ_1 positiv, dann folgt $B_{\varphi_1} = \mu_1$. Also gilt

$$\mu_1 = \sup \{ B_u; 0 < u \in C^2(\bar{\Omega}) \}.$$

- Mit dem Rayleigh-Quotienten und das werden wir im nächsten Abschnitt betrachten.

Fourieranalysis

Rechnen mit Fourier- ähnlichen Reihen



Kapitel 13

13.1 Schwache Lösungen

Bei

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.1)$$

haben wir angefangen mit klassischen Lösungen $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Dafür hat $f \in C(\bar{\Omega})$ nicht gereicht und man brauchte $f \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ für eine $\gamma \in (0, 1]$. Außerdem sollte $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$ liegen. Man konnte Hilberträume verwenden und für $f \in L^2(\Omega)$ fand man eine Lösung von

$$-\Delta u = f$$

in $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, brauchte jedoch noch immer Regularität von $\partial\Omega$. Dazu musste man schon schwache Ableitungen definieren. Die schwache Ableitung wurde definiert mit Testfunktionen und partieller Integration. Wir können sogar noch weitergehen:

Definition 13.1.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Dann nennt man $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von 13.1, wenn für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (13.2)$$

Bemerkung 13.1.2 Wenn außerdem gilt, dass $u \in W^{2,2}(\Omega)$, dann folgt für alle $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v \, dx = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) \, dx = 0.$$

Das Hauptlemma der Variationsrechnung sagt, wenn $u \in L^2(\Omega)$ derart ist, dass $\int_{\Omega} u \varphi \, dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann folgt $u = 0$ f.ü. Also folgt hier in dem Fall, dass

$$-\Delta u - f = 0 \text{ in } \Omega. \quad (13.3)$$

Das bedeutet, Lösungen $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ von (13.3) sind schwache Lösungen von (13.1).

Setzen wir in (13.2) für v die Lösung u ein, so finden wir

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} f u dx. \quad (13.4)$$

Verwendet man dies für die Eigenfunktion φ_k bei $-\Delta\varphi_k = \mu_k\varphi_k$, dann folgt:

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_k|^2 dx = \mu_k \int_{\Omega} \varphi_k^2 dx. \quad (13.5)$$

13.2 Rayleigh-Quotient

Wenn man bei einer Matrix $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ die Eigenwerte berechnen möchte, dann gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \\ \Updownarrow \\ \det(A - \lambda I) = 0. \end{aligned}$$

Das Lösen der letzten Gleichung geht algebraisch im Allgemeinen nur bis $n = 4$. Wenn A jedoch eine symmetrische positive Matrix ist, das heißt $A = A^T$ und

$$\exists c > 0 \text{ mit } \forall x \in \mathbb{R}^n : x \cdot Ax \geq c|x|^2,$$

dann findet man für den kleinsten Eigenwert:

$$\lambda_1 = \min_{|x|=1} x \cdot Ax = \min_{x \neq 0} \frac{x \cdot Ax}{x \cdot x}.$$

Um dies zu beweisen, sollte man sich erinnern, dass für symmetrische Matrizen gilt, dass sie orthonormal diagonalisierbar sind:

Es gibt $S, D \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ mit $S^T = S^{-1}$, D eine Diagonalmatrix und

$$S^T D S = A. \quad (13.6)$$

Also gibt es Eigenwerte $d_i \in \mathbb{R}$ von A und

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von S sind die Eigenvektoren. Weil die Eigenvektoren orthonormal sind, folgt

$$\begin{aligned} \min_{|x|=1} x \cdot Ax &= \min_{|x|=1} S^T x \cdot A S^T x = \min_{|x|=1} S^T x \cdot S^T D x \\ &= \min_{|x|=1} x \cdot D x = \min_{1 \leq i \leq n} d_i. \end{aligned}$$

Wenn S positiv ist, dann sind die Diagonaltermen von D auch positiv. Dann kann man Folgendes definieren:

$$\sqrt{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}.$$

Auch wenn man die genauen Zahlen d_i nicht kennt, kann man so $\sqrt{A} \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ definieren durch

$$\sqrt{A} := S^T \sqrt{D} S. \quad (13.7)$$

Aufgabe 13.1 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ eine positive symmetrische Matrix. Zeigen Sie Folgendes:

1. Für $\sqrt{A}$ in (13.7) gilt $\sqrt{A}\sqrt{A} = A$.
2. Die Zerlegung in (13.6) muss nicht eindeutig sein.
3. Die Definition von $\sqrt{A}$ in (13.7) ist eindeutig.
4. $\sqrt{A}$ ist eine positive symmetrische Matrix.

Aufgabe 13.2 Nehme

$$A := \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}.$$

1. Ist A eine positive symmetrische Matrix?
2. Wenn Sie Mathematica fragen, für welche Matrizen B gilt $B^2 = A$, dann bekommen Sie folgendes Ergebnis:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(-9 + 16\sqrt{2}) & \frac{12}{5}(-1 - \sqrt{2}) \\ \frac{12}{5}(-1 - \sqrt{2}) & \frac{1}{5}(-16 + 9\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(9 + 16\sqrt{2}) & \frac{12}{5}(1 - \sqrt{2}) \\ \frac{12}{5}(1 - \sqrt{2}) & \frac{1}{5}(16 + 9\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(-9 - 16\sqrt{2}) & \frac{12}{5}(-1 + \sqrt{2}) \\ \frac{12}{5}(-1 + \sqrt{2}) & \frac{1}{5}(-16 - 9\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(9 - 16\sqrt{2}) & \frac{12}{5}(1 + \sqrt{2}) \\ \frac{12}{5}(1 + \sqrt{2}) & \frac{1}{5}(16 - 9\sqrt{2}) \end{pmatrix} \right\}$$

Wieso 4 Lösungen? Welche sind positiv symmetrisch?

Für positive symmetrische Matrizen gilt also

$$\frac{x \cdot Ax}{x \cdot x} = \frac{x \cdot \sqrt{A}\sqrt{A}x}{x \cdot x} = \frac{\sqrt{A}x \cdot \sqrt{A}x}{x \cdot x} = \frac{|\sqrt{A}x|^2}{|x|^2}.$$

Ein ähnliches Ergebnis gilt für das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.8)$$

Es gilt für $u, v \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ mit dem Satz von Gauß, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u) v \, dx &= \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \end{aligned} \quad (13.9)$$

und damit

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) u \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \geq 0.$$

Aus (13.9) folgt auch die Symmetrie:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} u (-\Delta v) \, dx.$$

In einer Dimension kann man eine schärfere Abschätzung zeigen:

Lemma 13.2.1 Sei $\ell > 0$ und $u \in C^1[0, \ell] \cap C_0[0, \ell]$. Dann gilt

$$\int_0^\ell |u(x)|^2 \, dx \leq \ell^2 \int_0^\ell |u'(x)|^2 \, dx. \quad (13.10)$$

Beweis. Weil $u(0) = 0$, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\ell |u(x)|^2 dx &= \int_0^\ell |u(x)| \left| \int_0^x u'(s) ds \right| dx \\ &\leq \int_0^\ell |u(x)| \int_0^\ell |u'(s)| ds dx \\ &\leq \left(\int_0^\ell |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\ell |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \int_0^\ell 1 dx \end{aligned}$$

und wir finden die Aussage. In der letzten Zeile wurde zweimal Cauchy-Schwarz benutzt. ■

Weil man $W_0^{1,2}(\Omega)$ -Funktionen mit $C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$ -Funktionen in $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ -Norm approximieren kann, gilt (13.10) auch für Funktionen in $W_0^{1,2}(0, \ell)$.

Diese Ungleichung gilt auch in höheren Dimensionen:

Lemma 13.2.2 (Poincaré¹-Friedrichs Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann gibt es $C_\Omega > 0$ derart, dass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Mit dem Diameter von Ω definiert durch

$$\text{Diam}(\Omega) = \sup \{|x - y|; x, y \in \Omega\}$$

kann man ähnlich wie in Lemma 13.2.1 zeigen, dass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{Diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (13.11)$$

¹Henri Poincaré, 1854-1912

Aufgabe 13.3 Beweisen Sie (13.11).

Es gelten sogar noch schärfere Abschätzungen:

Aufgabe 13.4 Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ mit

$$\ell := \sup \{x_1; x \in \Omega\} - \inf \{x_1; x \in \Omega\} < \infty.$$

Zeigen Sie, dass für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \ell \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (13.12)$$

Die beste Konstante findet man jedoch mit dem folgenden Ergebnis:

Theorem 13.2.3 (Rayleigh²-Quotient) Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\inf_{0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx} = \tilde{\mu} > 0.$$

Wenn die Bedingungen von Korollar 12.3.4 erfüllt sind, gilt $\tilde{\mu} = \mu_1 = \lambda_1^{-1}$ und μ_1 ist der kleinste Eigenwert für (12.13).

Beweis. Durch die Ungleichung von Poincaré-Friedrichs weiß man, dass dieses Infimum positiv ist. Durch die Skalierung darf man annehmen, dass $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Im Fall, dass das Gebiet eine erste Eigenfunktion in $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ hat, gilt mit Gauß

$$\int_\Omega |\nabla \varphi_1(x)|^2 dx = - \int \varphi_1 \Delta \varphi_1 dx = \mu_1 \int \varphi_1^2 dx$$

²John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, 1842-1919

und folgt $\tilde{\mu} \leq \mu_1$.

Weil jede Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ in $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ -Norm approximiert werden kann mit $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ und dann auch $f_n := -\Delta u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu} &= \inf_{0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx} \\
 &= \inf_{0 \neq f \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla \mathcal{G}f(x)|^2 dx}{\int_\Omega |\mathcal{G}f(x)|^2 dx} \\
 &= \inf_{0 \neq f \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{-\int_\Omega (\mathcal{G}f(x)) \Delta \mathcal{G}f(x) dx}{\int_\Omega |\mathcal{G}f(x)|^2 dx} \\
 &= \inf_{0 \neq f \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega (\mathcal{G}f(x)) f(x) dx}{\int_\Omega |\mathcal{G}f(x)|^2 dx} \\
 &= \inf_{0 \neq f \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\sum_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k \langle \varphi_k, f \rangle^2}{\sum_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k^2 \langle \varphi_k, f \rangle^2} \\
 &= \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k \langle \varphi_k, f \rangle^2; \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k^2 \langle \varphi_k, f \rangle^2 = 1 \right\}. \quad (13.13)
 \end{aligned}$$

Setzen wir

$$y_k^2 = \sum_{\lambda=\lambda_k} \langle \varphi_k, f \rangle^2, \quad (13.14)$$

dann sind die Summen in (13.13) über unterschiedlichen λ_k . Das wäre wie Multiplizität 1 für jeden Eigenwert. Also nehmen wir an, dass alle λ_k verschieden sind.

Die Zahl $\tilde{\mu}$ ist dann das Infimum der Funktion

$$F(y_1, y_2, \dots) := \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k y_k^2$$

unter der Nebenbedingung

$$G(y_1, y_2, \dots) := \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k^2 y_k^2 = 1.$$

Eine Unterschranke für das Infimum liefert

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k y_k^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \lambda_k y_k^2 = \lambda_1^{-1}.$$

Wenn $y_k = 0$ für $k \geq 2$, dann gilt

$$G(y_1, y_2, \dots) = \lambda_1^2 y_1^2 = 1$$

und

$$F(y_1, y_2, \dots) = \lambda_1 y_1^2 = \lambda_1^{-1}.$$

Also folgt $\tilde{\mu} = \lambda_1^{-1}$. ■

Auch die höheren Eigenwerte kann man iterativ finden. Definiert man $\mathcal{R} : W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{R}(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_\Omega |u(x)|^2 dx},$$

dann kann man zeigen, wenn man die ersten k Eigenfunktionen kennt, dass mit

$$\mathcal{W}_{k+1} := \text{Span}[\varphi_1, \dots, \varphi_k]^\perp \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

gilt

$$\mu_{k+1} = \inf_{u \in \mathcal{W}_{k+1} \setminus \{0\}} \mathcal{R}(u).$$

13.3 Eigenfunktion und Raum

In einer Dimension, sagen wir $\Omega = (0, \ell)$, kann man eine Eigenfunktion im schwachen Sinne betrachten. Das heißt $\varphi_k \in W_0^{1,2}(0, \ell)$ und

$$\int_0^\ell \varphi'_k(x) \psi'(x) dx = \mu_k \int_0^\ell \varphi_k(x) \psi(x) dx$$

für alle $\psi \in C_0^\infty(0, \ell)$. (13.15)

Mit partieller Integration findet man

$$\int_0^\ell \left(\varphi'_k(x) + \mu_k \int_0^x \varphi_k(s) ds \right) \psi'(x) dx = 0$$

für alle $\psi \in C_0^\infty(0, \ell)$. (13.16)

Lemma 13.3.1 Sei $f \in L^1(0, \ell)$. Wenn

$$\int_0^\ell f(x) \psi'(x) dx = 0 \text{ für alle } \psi \in C_0^\infty(0, \ell), \quad (13.17)$$

dann folgt $f = c$.

Beweis. Sei χ eine wachsende Funktion in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\chi(x) = 0 \text{ für } x \leq \frac{1}{3}\ell \text{ und } \chi(x) = 1 \text{ für } x \geq \frac{2}{3}\ell.$$

Es gilt $\chi' \in C_0^\infty(0, \ell)$. Wenn $\psi \in C_0^\infty(0, \ell)$, dann liegt eine Stammfunktion von ψ nicht unbedingt in $C_0^\infty(0, \ell)$, aber man kann selber kontrollieren, dass $\tilde{\psi}$, definiert durch

$$\tilde{\psi}(x) = \int_0^x \psi(s) ds - \chi(x) \int_0^\ell \psi(s) ds,$$

schon in $C_0^\infty(0, \ell)$ liegt. Setzt man $\tilde{\psi}$ ein in (13.17), dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\ell f(x) \tilde{\psi}'(x) dx \\ &= \int_0^\ell f(x) \left(\psi(x) - \chi'(x) \int_0^\ell \psi(s) ds \right) dx \\ &= \int_0^\ell f(x) \psi(x) dx - \int_0^\ell f(x) \chi'(x) \int_0^\ell \psi(s) ds dx \\ &= \int_0^\ell f(x) \psi(x) dx - \int_0^\ell f(s) \chi'(s) \int_0^\ell \psi(x) dx ds \\ &= \int_0^\ell \left(f(x) - \int_0^\ell f(s) \chi'(s) ds \right) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Weil dies für jedes $\psi \in C_0^\infty(0, \ell)$ gilt, folgt

$$f(x) = \int_0^\ell f(s) \chi'(s) ds$$

und das heißt, $f(x)$ ist konstant. ■

Aus (13.16) folgt dann

$$\varphi'_k(x) = c - \mu_k \int_0^x \varphi_k(s) ds$$

und wenn $\varphi_k \in W^{1,2}(0, \ell)$, dann folgt $\varphi'_k \in W^{1,2}(0, \ell)$ und $\varphi_k \in W^{2,2}(0, \ell)$, usw. Das bedeutet, jede Eigenfunktion in $W_0^{1,2}(0, \ell)$ ist eine Eigenfunktion in $W^{2,2}(0, \ell) \cap W_0^{1,2}(0, \ell)$. Eine solche Eigenfunktion ist eine Eigenfunktion in $C^2[0, \ell] \cap C_0[0, \ell]$. Auf Englisch nennt man ein solches Argument, wo man schrittweise zeigt, dass die Lösung eine höhere Regularität hat, *bootstrapping*.

In mehr als einer Dimension hängt es vom Rand $\partial\Omega$ und Raum ab, ob eine Eigenfunktion in $W_0^{1,2}(\Omega)$ auch in $W^{2,2}(\Omega)$ oder sogar in $C^2(\bar{\Omega})$ liegt. Kombiniert man die Existenz und Regularitätsergebnisse in zum Beispiel [7], dann kann man das folgende Ergebnis folgern:

Theorem 13.3.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$ für ein $\gamma \in (0,1)$. Dann sind die Eigenfunktionen*

1. $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+} \subset C^2(\bar{\Omega})$ von

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \mu\varphi & \text{in } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

2. $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+} \subset W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ von $-\Delta\varphi = \mu\varphi$, und

3. $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ von

$$\int (\nabla\varphi \nabla u - \mu\varphi v) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

jeweils identisch (genauer gesagt: liefern jeweils den gleichen Eigenraum).

Ohne ausreichende Regularität vom Rand können andere Ergebnisse anfallen. In [12] findet man ein Beispiel mit unterschiedlichen raumabhängigen ersten Eigenfunktionen für

$$\begin{cases} \Delta^2\varphi = \mu\varphi & \text{in } \Omega, \\ \varphi = \Delta\varphi = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.18)$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pacman-ähnlich. Siehe Abbildung 13.1.

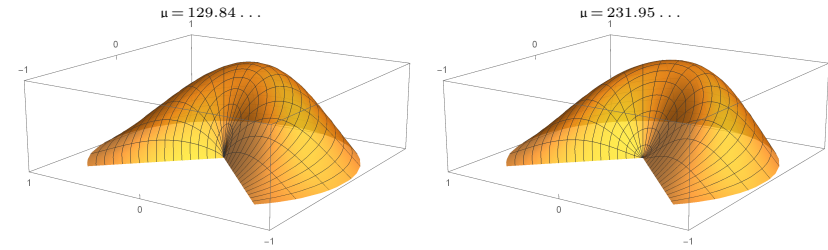


Abbildung 13.1: Zwei verschiedene, positive, erste Eigenfunktionen für (13.18); das Bild wurde aus [12] übernommen.

13.4 Eigenfunktionen auf speziellen Gebieten

13.4.1 Rechtecken

Für $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ und

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.19)$$

ist

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(m\frac{\pi}{b}y\right) \right\}_{n,m \in \mathbb{N}^+}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem, das passende Eigenfunktionen zum Dirichlet-Laplace Problem in (13.19) enthält. Weil

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right) \right\}_{n \in \mathbb{N}^+}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(0, a)$ und

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(m\frac{\pi}{b}y\right) \right\}_{m \in \mathbb{N}^+}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(0, b)$ ist, folgt, dass die Produkte ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(\Omega)$ liefern.

Ähnliches gilt für höherdimensionale „rechteckige“ Gebiete

$$\Omega = (0, a_1) \times \cdots \times (0, a_n) \subset \mathbb{R}^n \text{ mit } n \geq 3.$$

13.4.2 Die Kreisscheibe

Für $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ kann man versuchen Eigenfunktionen via Polarkoordinaten zu finden. Für $x = r \cos \theta$ und $y = r \sin \theta$ versucht man

$$\varphi(r, \theta) := R(r)\Theta(\theta)$$

und mit

$$-\Delta \varphi = - \left(r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \right) \varphi$$

wird das Eigenwertproblem $-\Delta \varphi = \mu \varphi$ so

$$\left(-R''(r) - \frac{1}{r} R'(r) \right) \Theta(\theta) - \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) = \mu R(r) \Theta(\theta).$$

Dann folgt, wenn wir uns keine Sorgen bei Nullstellen machen:

$$r^2 \frac{-R''(r) - \frac{1}{r} R'(r) - \mu R(r)}{R(r)} = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Links steht eine Funktion von r und rechts eine von θ . Weil θ und r unabhängig sind, muss dieser Ausdruck konstant sein:

$$r^2 \frac{-R''(r) - \frac{1}{r} R'(r) - \mu R(r)}{R(r)} = \Lambda = \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Weil Θ periodisch sein muss, sind die möglichen (normalisierten) Lösungen

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \text{ und } \Lambda = -n^2.$$

Weiter finden wir

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (\mu r^2 - n^2) R(r) = 0 \quad (13.20)$$

und als Randbedingung

$$R(1) = 0.$$

Die Differentialgleichung in (13.20) ist singulär in 0. Das heißt, dass die Koeffizienten bei Ableitungen 0 werden. Lösungen können da dann unbeschränkt werden. Für $r = 0$ sollen in unserem Fall die Funktion R und auch ihre Ableitungen beschränkt sein. Für $n = 0$ folgt so

$$R'(0) = \lim_{r \downarrow 0} (r R''(r) + R'(r) + \mu r R(r)) = 0$$

und ähnlich für $n \neq 0$, dass $R(0) = 0$.

Um explizite Lösungen zu finden, geht man wie folgt vor: Durch die Substitution $s := \sqrt{\mu} r$ und $f(s) = f(\sqrt{\mu} r) = R(r)$ mit $n = \alpha$ folgt

$$s^2 f''(s) + s f'(s) + (s^2 - \alpha^2) f(s) = 0 \quad (13.21)$$

Die Differentialgleichung in (13.21) ist nach Bessel benannt worden. Bei 0 beschränkte Lösungen von (13.21) sind die **Bessel-Funktionen** J_α mit $\alpha \geq 0$. Diese Bessel-Funktionen J_α kann man als Potenzreihe darstellen:

$$J_\alpha(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{s}{2} \right)^{2m + \alpha}.$$

Eine zweite unabhängige Lösung von (13.21) hat jeweils eine Singularität in 0. Dies und viele andere Eigenschaften von Bessel-Funktionen werden in [13] vorgestellt.

Jede Bessel-Funktion J_α mit $\alpha \geq 0$ ist wohl-definiert auf $\mathbb{C}$ und hat abzählbar viele (einfache) Nullstellen auf $\mathbb{R}^+$, die man notiert durch

$$0 < j_{\alpha,1} < j_{\alpha,2} < j_{\alpha,3} < \cdots \rightarrow \infty.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Die Paare $(R, \mu) \in (C^2[0,1], \mathbb{R})$, definiert durch $R(r) = J_n(j_{n,k}r)$ und $\mu = j_{n,k}^2$ erfüllen

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR'(r) + (\mu r^2 - n^2) R(r) = 0 \text{ für } r \in (0,1) \\ R(1) = 0, \\ R \text{ beschränkt auf } [0,1]. \end{cases} \quad (13.22)$$

Es gibt auch keine unabhängigen sonstigen Lösungen, die (13.22) erfüllen und $\{J_n(j_{n,k}\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ ist ein vollständiges System, das orthogonal ist bezüglich

$$(L^2((0,1), r dr), \langle \cdot, \cdot \rangle_r) \text{ mit} \\ \langle u, v \rangle_r = \int_0^1 u(r)v(r)r dr.$$

Die Funktionen

$$\{(r, \theta) \mapsto e^{in\theta} J_n(j_{n,k}r)\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+}$$

sind Eigenfunktionen für

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \mu \varphi & \text{in } B_1(0) \subset \mathbb{R}^2, \\ \varphi = 0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Kombiniert man $e^{in\theta}$ und $e^{-in\theta}$ zu $\cos(n\theta)$ und $\sin(n\theta)$, dann findet man reelle, orthogonale Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \varphi_{n,k,c}(r, \theta) &:= \cos(n\theta) J_n(j_{n,k}r) \text{ für } n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+, \\ \varphi_{n,k,s}(r, \theta) &:= \sin(n\theta) J_n(j_{n,k}r) \text{ für } n \in \mathbb{N}^+, k \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Einige Skizzen solcher Eigenfunktionen findet man in Abbildung 13.2.

Die Eigenfunktionen sollte man normieren durch

$$1 = \int_{B_1(0)} |\varphi|^2 dx = \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} |\varphi(r, \theta)|^2 r d\theta dr.$$

Die normierten Eigenfunktionen bilden dann ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(B_1(0))$.

13.4.3 Die Kugel

Für $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ verwendet man Kugelkoordinaten

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \psi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \psi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases}$$

mit $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, \pi]$ und $\psi \in [0, 2\pi]$ und wird

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{(\sin \theta)^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) u.$$

Auch hier kann man Eigenfunktionen finden der Form

$$\varphi(r, \theta, \psi) = R(r)\Theta(\theta)\Psi(\psi).$$

Dabei werden Bessel-Funktionen J_α erscheinen mit $\alpha = n + \frac{1}{2}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 13.5 Welche Eigenwertprobleme erfüllen R , Θ und Ψ , wenn man Eigenfunktionen passend zu (13.19) sucht? Geben Sie auch an, welches innere Produkt man jeweils verwenden muss für das passende Orthonormieren von R , Θ und Ψ .



Abbildung 13.2: Eigenfunktionen $\cos(n\theta)J_n(j_{n,k}r)$ für $0 \leq n \leq 4$ und $1 \leq k \leq 8$.

Literaturverzeichnis

- [1] Adams, Robert A.; Fournier, John J. F.: Sobolev spaces, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] Churchill, Ruel V.: Fourier Series and Boundary Value Problems. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-London, 1941.
- [3] Barta, János; Sur la vibration d'une membrane. C.R. Acad. Sci., Paris 204, 472-473 (1937).
- [4] Duoandikoetxea, Javier: Fourier Analysis, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [5] Evans, Lawrence C.: Partial differential equations, AMS, Providence, RI, 2010.
- [6] Fourier, Joseph: [La théorie analytique de la chaleur](#), Firmin Didot, Paris, 1822.
- [7] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S.: Elliptic partial differential equations of second order, Grundlehren Math. Wiss., 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [8] Hörmander, Lars: The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis, Springer-Verlag, 1983.
- [9] Rellich, F: Ein Satz über mittlere Konvergenz, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1930, 30-35.
- [10] Stein, Elias M.; Shakarchi Rami: Fourier Analysis, An Introduction. Princeton Lectures in Analysis, 1. Princeton University Press, Princeton N.J., 2003.
- [11] Stein, Elias M.; Weiss, Guido: Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton N.J., 1971.
- [12] Sweers, G. , Bilaplace eigenfunctions compared with Laplace eigenfunctions in some special cases, in 'Positivity and Noncommutative Analysis' (2019), 537-561, Birkhäuser.
- [13] Watson, G.N.; A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1995.
- [14] Wiener, Norbert: [The Fourier Integral and Certain of Its Applications](#), Cambridge University Press, 1933.
- [15] Zygmund, Antoni: [Trigonometric Series](#), Cambridge University Press, 1935.

Index

Abel-Approximationen, 43
Abel-summierbar, 41
adjungierte Abbildung, 118

Bessel-Funktionen, 150
Besselsche Ungleichung, 52
Bildmenge, 114
Bilinearität, 51

Cauchyscher Hauptwert, 104
Cesàro-Summe, 37

Dicht-definiert, 114
Dimension, 114
Dirac- δ -Distribution, 75
Direkte Summe, 117
Dirichlet-Kern, 26
Distanz zum Rand, 136
Dreiecksungleichung bei einer Metrik, 67

Eigenfunktion, 81
Eigenraum, 114
Eigenwertproblem, 19
Einbettung, 131
Eulersche Formel, 3

Fast überall, 9
Fejér-Kern, 39
Fouriercosinusreihenentwicklung, 17
Fourierreihenentwicklung, 11
Fouriersinusreihenentwicklung, 13
Fréchetraum, 67
Fredholm Alternative, 119
Friedrichs'scher Glätter, 64, 66

Gebiet, 18
Gram-Schmidt-Verfahren, 86, 116
Guter Kern, 36, 64

Halbnorm, 66
Harmonische Funktion, 2
Hauptsymbol, 101
Hausdorff-Young Ungleichung, 92
Hermite-Funktionen, 83
Hermite-Polynome, 83
Hilbertraum, 51
Hölderräume, 128

Inneres Produkt, 51

Kommutator, 83

- kompakte Abbildung, 113
- kompakte Menge, 111
- komplexe Logarithmus, 7
- Konvergenzradius, 4
- Kriterium von Dini, 28
- Kriterium von Jordan, 32
- Kronecker- δ , 52

- $L^2(0, 2\pi)$, 9
- L^∞ -Norm, 5
- L^2 -Norm, 7
- Laplace-Differentialoperator, 2
- Lebesgue-Nullmenge, 6
- Linearkombination, 3

- Maximumprinzip, 136
- Metrik, 67
- Metrischer Raum, 67
- Mittelwertsatz 1 für Integrale, 29
- Mittelwertsatz 2 für Integrale, 30
- Multiindexnotation, 88
- Multiplizität, 114

- Nullmenge, 6
- Nullraum, 114

- Operatornorm, 113
- Ordnungssymbole von Landau, 30
- Orthogonales Komplement, 116
- Orthonormalsystem, 52

- Parallellogrammgleichung, 53
- Parsevalsche Gleichung, 55, 71, 90, 91

- partielle Integration, 107
- Poisson-Kern, 43
- Polarisationsformel, 54
- Positiv Definitheit, 51, 52
- Positivität
 - bei einer Metrik, 67
- Prähilbertraum, 51
- Produktansatz, 18

- reguläre Distribution, 76
- Resolventenmenge, 115
- Riemann-Lebesgue Theorem, 60

- Satz von
 - Gauß, 108
- Satz von Green, 108
- Satz von Riemann-Lebesgue, 25
- Schiefsymmetrie, 51
- Schwach*-Konvergenz, 77
- schwache Ableitung, 128
- Schwartz-Raum, 66
- Selbstadjungiert, 118
- Sesquilinearität, 52
- Sobolev-Raum, 129
- Spektrum, 115
- Spuroperator, 129
- starkes Maximumprinzip, 136
- Symbol, 101
- Symmetrie, 51
 - bei einer Metrik, 67
- symmetrische m -te Ordnung Partialsumme, 24

- Temperierte Distributionen, 74

Theorem von Abel, 6

Topologie, 74

Topologischer Vektorraum, 74

trigonometrische Funktionen, 12

unabhängig, 114

Ungleichung von Barta, 141

Ungleichung von Cauchy-Schwarz, 22

Ungleichung von Poincaré-Friedrichs, 146

Vollständiges Orthonormalsystem, 56

wesentliches Supremum, 6

zusammenhängend, 18