Skript mit Aufgaben für

Funktionalanalysis

G. Sweers

Sommersemester 2022

Vorwort

Dieses Skript wurde in online-Zeiten verfasst und enthält einfache Aufgaben, die das selbstständige Bearbeiten fördern sollten. Manche dieser Aufgaben haben Kästchen, in dem Sie selber die Aufgabe ausarbeiten können.

Die farbliche Markierung von Beispielen und Aufgaben sollten helfen, diese verschiedenen Teile schnell zu erkennen.

Das Skript ist inspiriert durch [3] und [2]. Es wird sich lohnen, auch diese Bücher anzuschauen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Eine Einführung

1.1 Lineare Algebra

Bei der Linearen Algebra hat man gelernt, dass man lineare Abbildungen in endlich dimensionalen Räumen wie $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ studieren kann mittels Matrizen. Für $f \in \mathbb{R}^n$ und $A \in M^{n\times m}(\mathbb{R})$, kann man eine Lösung $u \in \mathbb{R}^m$ der Gleichung

$$Au = f \tag{1.1}$$

finden, genau dann wenn $f \in \operatorname{Im}(A) \subset \mathbb{R}^n$, der Bildraum oder Spaltenraum von A. Will man (1.1) lösen können für jedes $f \in \mathbb{R}^n$, dann braucht man, dass $\operatorname{Rang}(A) = n$. Der Rang einer Matrix wurde definiert als die Dimension des Spaltenraums.

Will man außerdem, dass die Lösung $u \in \mathbb{R}^m$ eindeutig ist, dann braucht man, dass $m = n$. Wenn $n = m = \operatorname{Rang}(A)$ gilt, dann gibt es eine inverse Matrix $A^{-1} \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ und man findet die Lösung von (1.1) durch

$$u = A^{-1}f. \tag{1.2}$$

Um herauszufinden, ob A invertierbar ist, kann man die Determinante $\det(A)$ berechnen. Es gilt

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar.}$$

Dies erklärt die Existenz und Eindeutigkeit bei dem Problem in (1.1), jedoch sollte ein wohl-definiertes Problem nach Hadamard die folgenden Eigenschaften haben:

Kriterien von Hadamard:

- Existenz: Es gibt mindestens eine Lösung.
- Eindeutigkeit: Es gibt höchstens eine Lösung.
- Stabilität: Kleine Änderungen in den Daten geben kleine Änderungen in den Lösungen.

Wie steht es mit dem dritten Punkt? Für diesen Punkt müssen wir wissen, was klein bedeutet, das heißt, wir brauchen eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$. Die zugehörige Matrixnorm auf $M^{n\times n}(\mathbb{R})$ wird definiert durch

$$\|A\|_{\text{M-Norm}} = \sup\left\{\frac{\|Af\|}{\|f\|}; f \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}. \tag{1.3}$$

Wenn $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ invertierbar ist, dann findet man, dass wenn

$$Au_k = f_k \quad \text{und} \quad f_k \to f_\infty \text{ für } k \to \infty,$$

dann folgt, dass $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Es gilt ja, dass

$$\begin{aligned} \|u_k - u_\ell\| &= \left\|A^{-1}f_k - A^{-1}f_\ell\right\| \\ &= \left\|A^{-1}(f_k - f_\ell)\right\| \\ &\leq \left\|A^{-1}\right\|_{\text{M-Norm}} \|f_k - f_\ell\| . \end{aligned}$$

Weil Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}^n$ konvergieren, existiert

$$u_\infty = \lim_{k\to\infty} u_k$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \|Au_\infty - f_\infty\| &= \|Au_\infty - Au_k + f_k - f_\infty\| \\ &\leq \|A(u_\infty - u_k)\| + \|f_k - f_\infty\| \\ &\leq \|A\| \|u_\infty - u_k\| + \|f_k - f_\infty\| . \end{aligned}$$

Weil $\|u_\infty - u_k\| \to 0$ und $\|f_k - f_\infty\| \to 0$ für $k \to \infty$, folgt, dass $\|Au_\infty - f_\infty\| = 0$, also $Au_\infty = f_\infty$.

....

Aufgabe 1.1 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Welche Bedingungen erfüllt eine Norm auf V?*

Aufgabe 1.2 *Welche Abbildungen sind linear?*

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definiert durch*

$$f(x,y) = \left(\ln\left(\frac{e^{3x}}{e^y}\right), \sqrt[3]{x^3+y^3}\right).$$

2. $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definiert für* $x, y \in \mathbb{R}$ *durch*

$$g(x+iy) = x - iy.$$

3. $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ *definiert durch*

$$A(f_1, f_2, \dots, f_{2n}) = (f_1 f_2, f_3 f_4, \dots, f_{2n-1} f_{2n}).$$

4. $I : C[0,1] \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

5. $B : C[0,1] \to C[0,1]$ *definiert durch*

$$B(f)(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(1-x)}{3}.$$

6. $D : C^1[0,1] \to C[0,1]$ *definiert durch*

$$D(f)(x) = f'(x) + xf\left(x^2\right).$$

Aufgabe 1.3 *Die euklidische Norm* $\|\cdot\|_2$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *ist definiert durch*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^n f_k^2}.$$

Man hat auch $\|f\|_1 = \sum_{k=1}^n |f_k|$ *und* $\|f\|_\infty = \max\limits_{1\le k\le n} |f_k|$.

1. *Berechnen Sie die besten Konstanten* $C_{i,j} \in \mathbb{R}^+$ *für* $i,j \in \{1,2,\infty\}$ *mit* $i \neq j$ *derart, dass*

$$\|f\|_i \le C_{i,j} \|f\|_j \text{ für alle } f \in \mathbb{R}^n.$$

2. *Zwei Normen* $\|\cdot\|_a$ *und* $\|\cdot\|_b$ *heißen äquivalent auf den Vektorraum* V*, wenn es Konstanten* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ *gibt, derart dass*

$$c_1 \|f\|_a \le \|f\|_b \le c_2 \|f\|_b \text{ für alle } f \in V.$$

Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^n$ *alle Normen äquivalent sind.*

1.2 Lineare Analysis

Funktionalanalysis war in erster Instanz darauf gerichtet, die linearen Funktionale in unendlich dimensionalen normierten Vektorräumen zu erforschen. Inzwischen gibt es auch nichtlineare Funktionalanalysis, aber mit dieser werden wir uns hier kaum beschäftigen.

Bevor wir uns in die Theorie stürzen, werden wir uns einige Beispiele anschauen, die die Differenz mit endlichen Dimensionen zeigen. Auch einige Definitionen werden wiederholt.

In der Funktionalanalysis sind normierte Vektorräume $(V, \|\cdot\|_V)$ und lineare Abbildungen zwischen solchen Räumen der Anfang.

Definition 1.1 *Seien* V_1 *und* V_2 *reelle Vektorräume. Der Operator* $A : V_1 \to V_2$ *heißt* ***linear****, wenn*

$$A(c_1x + c_2y) = c_1A(x) + Ac_2(y)$$

für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *und* $x, y \in V_1$.

Definition 1.2 *Seien* $\left(V_1, \|\cdot\|_{V_1}\right)$ *und* $\left(V_2, \|\cdot\|_{V_2}\right)$ *normierte Vektorräume, dann definiert man die induzierte* ***Operatornorm*** *für lineare Abbildungen* A *von* V_1 *nach* V_2 *durch*

$$\|A\|_{V_1\to V_2} := \sup\left\{\frac{\|Ax\|_{V_2}}{\|x\|_{V_1}}; x \in V_1 \setminus \{0\}\right\}. \tag{1.4}$$

Man zeigt sofort, dass diese Definition äquivalent ist zu

$$\|A\|_{V_1\to V_2} := \sup\left\{\|Ax\|_{V_2}; x \in V_1 \text{ mit } \|x\|_{V_1} \le 1\right\}.$$

Definition 1.3 *Eine lineare Abbildung* $A : V_1 \to V_2$ *heißt* ***linear beschränkt****, wenn* $\|A\|_{V_1\to V_2} < \infty$.

Meistens werden wir in linear beschränkt das Wort linear weglassen. Wenn man das „beschränkt“ für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bei linearen Abbildungen verwendet, bleibt ja nur die triviale Abbildung übrig und das wäre ja kaum sinnvoll.

Definition 1.4 *Seien* $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *und* $(V_2, \|\cdot\|_2)$ *reelle normierte Vektorräume und* W_1 *ein Teilraum von* V_1. *Für den linearen Operator* $A : W_1 \subset V_1 \to V_2$ *definiert man:*

- *Das **Definitionsgebiet** von* A*:* $\operatorname{Dom}(A) = W_1$.
- *Die **Bildmenge** von* A*:* $\operatorname{Range}(A) = A(W_1)$.
- *Der **Kern** von* A*:* $\operatorname{Ker}(A) = \{x \in W_1; Ax = 0\}$.

. . . .

Aufgabe 1.4 *Wir betrachten*

$$A : \operatorname{Dom}(A) \subset C[0,\pi] \to C[0,\pi]$$

definiert durch

$$A(f)(x) = f'(x) + \int_0^x f(s)\,ds.$$

1. *Geben Sie das maximal passende* $\operatorname{Dom}(A)$ *an.*
   Die Lösungen von $Af = g$ *sind, mit* $c \in \mathbb{R}$ *beliebig:*

   $$f(x) = c\cos(x) + \int_0^x \cos(x-s)\, g(s) ds.$$

2. *Berechnen Sie* $\operatorname{Ker}(A)$.
3. *Berechnen Sie* $\operatorname{Range}(A)$.

Aufgabe 1.5 *Die gleichen Fragen aus der letzten Aufgabe für*

$$A(f)(x) = -f'(x) + \int_0^x f(s)\,ds.$$

Warnung: diese Aufgabe verlangt Erfahrung in DGL.

1.2.1 Inneres Produkt

Man kann $\mathbb{R}^n$ auffassen als n Kopien von $\mathbb{R}$ und dann $\mathbb{R}^\infty$ als abzählbar unendlich viele Kopien von $\mathbb{R}$. Eine natürliche Norm fehlt da jedoch. Eine Möglichkeit, wie man einen Raum sogar mit einem inneren Produkt bekommt, findet man im folgenden Beispiel:

Beispiel 1.5 *Die einfachste Erweiterung von $\mathbb{R}^n$ zu etwas wie $\mathbb{R}^\infty$ mit Norm ist ℓ^2. Man definiert ℓ^2 als die Menge aller Folgen $x := \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ mit*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+} x_k^2 < \infty,$$

genauer gesagt, $\lim_{M\to\infty} \sum_{k=1}^M x_k^2$ konvergiert. Da $x_k^2 \geq 0$ gilt, ist $a_M := \sum_{k=1}^M x_k^2$ eine wachsende Folge und aus der Beschränktheit von $\{a_M\}_{M\in\mathbb{N}^+}$ folgt die Konvergenz.
Der Vektorraum ℓ^2 ist ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_2$, definiert durch:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}^+} x_k^2}.$$

Diese Norm ist die natürliche Erweiterung der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$. Man kann sogar ein inneres Produkt definieren für ℓ^2, nämlich

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k\in\mathbb{N}^+} x_k y_k. \tag{1.5}$$

Wenn $x, y \in \ell^2$, dann zeigt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2 \, . \tag{1.6}$$

In $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ definierte man sich

$$\begin{aligned} x\cdot y &= x_1y_1 + x_2y_2 \qquad \text{bzw.} \\ x\cdot y &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \end{aligned}$$

und fand für den Winkel α zwischen x und y die folgende Formel mit $\|\cdot\|$ der euklidischen Norm:

$$\cos(\alpha) = \frac{x\cdot y}{\|x\| \, \|y\|}$$

Allgemein ist ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf einem reellen Vektorraum V eine Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R},$$

mit einigen festgelegten Eigenschaften. Aus diesen Eigenschaften folgt, dass

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},$$

definiert durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, eine Norm ist.

Aufgabe 1.6 *Welche Eigenschaften muss ein inneres Produkt auf dem reellen Vektorraum V haben?*

Definition 1.6 *Einen Vektorraum V mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nennt man einen* ***Prähilbertraum****.*

Oft sieht man Skalarprodukt statt inneres Produkt. Da Skalarprodukt leider in der Literatur nicht einheitlich definiert ist, verwenden wir den Begriff „inneres Produkt“. Skalarprodukt wird manchmal nämlich auch ohne die Positiv-Definitheit benutzt.

Hat ein inneres Produkt diese Eigenschaften, so folgt für die zugehörige Norm:

- Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz:
$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \, \|y\| \text{ für alle } x, y \in V.$$
- Die Dreiecksungleichung für einen Prähilbertraum:
$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \text{ für alle } x, y \in V.$$

. . . .

Aufgabe 1.7 *Sei V ein reeller Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$. Beweisen Sie die Ungleichung von Cauchy-Schwarz und die Dreiecksungleichung. Hinweis: Betrachten Sie für Cauchy-Schwarz das Minimum von $t \mapsto \langle x - ty, x - ty \rangle$.*

Aufgabe 1.8 *Wir betrachten auf $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ einige Abbildungen.*

1. *$S : \ell^2 \to \ell^2$ definiert durch*
$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$
Zeigen Sie, dass S eine Linksinverse hat, aber keine Rechtsinverse.
2. *Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $T_\alpha := I + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k S^k$ definiert als Abbildung auf ℓ^2? NB: Für $x = (x_1, x_2, \dots)$ hat man $S^2(x) = S(S(x))$ usw.; I ist die Identität: $I(x) = x$.*
3. *Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat T_α eine Linksinverse? Rechtsinverse?*
4. *Die Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$ für Abbildungen $A : \ell^2 \to \ell^2$ definiert man wie die Matrixnorm in (1.3). Berechnen Sie $\|S\|_{Op}$.*
5. *Können Sie $\|T_\alpha\|_{Op}$ berechnen?*

6. Zeigen Sie, dass $\|T_\alpha\|_{Op} \le \frac{1}{1-|\alpha|}$ für $|\alpha| < 1$.
7. Sei $e_1 = (1,0,0,\dots)$. Zeigen Sie, dass $\|T_\alpha e_1\| \ge \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ für $|\alpha| < 1$.

1.2.2 Banachräume

Definition 1.7 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Wenn jede Cauchy-Folge in V konvergiert in V, dann nennt man $(V, \|\cdot\|)$ ein* ***Banachraum****.*

Bemerkung 1.7.1 *Statt Banachraum wird auch vollständiger normierter Vektorraum gesagt.*

Definition 1.8 *Ein Prähilbertraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der vollständig ist bezüglich der Norm $\|u\| := \sqrt{\langle u,u\rangle}$ heißt* ***Hilbertraum****.*

. . . .

Beispiel 1.9 *Sei $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ wie in Beispiel 1.5. Dies ist ein Hilbertraum. Das zeigt man wie folgt: Sei $\left\{x^{(n)}\right\} \subset \ell^2$ eine Cauchy-Folge, das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass:*

$$n,m \ge M_\varepsilon \implies \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_2 < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Dann folgt, dass $\left\{x_k^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist und weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, dass $x_k^\infty = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ in $\mathbb{R}$ existiert. Es bleibt noch zu zeigen, dass $x^\infty := (x_1^\infty, x_2^\infty, x_3^\infty, \dots) \in \ell^2$ und dass $\left\|x^{(n)} - x^\infty\right\|_2 \to 0$.

1) Die Cauchy-Folge ist gleichmäßig beschränkt:

Für alle $n \ge M_1$ gilt wegen (1.7), dass

$$\left\|x^{(n)}\right\|_2 \le \left\|x^{(n)} - x^{(M_1)}\right\|_2 + \left\|x^{(M_1)}\right\|_2 \le 1 + \left\|x^{(M_1)}\right\|_2.$$

2) $x^\infty \in \ell^2$:

Weil $x_k^{(n)} \to x_k^\infty$ für $n \to \infty$ gilt für jedes endliche $K \in \mathbb{N}$, dass es $n > M_1$ gibt derart, dass

$$\sum_{k=1}^K \left(x_k^\infty\right)^2 \le \sum_{k=1}^K \left(x_k^{(n)}\right)^2 + 1 \le \left\|x^{(n)}\right\|_2^2 + 1 \le \left(1 + \left\|x^{(M_1)}\right\|_2\right)^2 + 1 =: L,$$

also ist die Summe gleichmäßig beschränkt und wir dürfen $K \to \infty$ nehmen: $\|x^\infty\| \le \sqrt{L} < \infty$.

3) $x^{(n)} \to x^\infty$ in ℓ^2:

Für jedes $K \in \mathbb{N}^+$ und $n,m \ge M_\varepsilon$ gilt

$$\sum_{k=1}^K \left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 \le \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_2^2 < \varepsilon^2.$$

Dann gilt auch, wenn wir $m \to \infty$ nehmen, dass

$$\sum_{k=1}^K \left(x_k^{(n)} - x_k^\infty\right)^2 \le \varepsilon^2$$

und weil dies unabhängig von K ist, folgt $\left\|x^{(n)} - x^\infty\right\| \le \varepsilon$ für $n \ge M_\varepsilon$.

Beispiel 1.10 *Der Vektorraum ℓ^∞ ist definiert als die Menge aller beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition and Multiplikation mit Skalaren. Mit $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch*

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}^+} |x_k|$$

wird $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum.

Aufgabe 1.9 *Auch für ℓ^2 ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ auf ℓ^2 nicht äquivalent sind.*

Aufgabe 1.10 *Ist $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ auch Banachraum?*

Aufgabe 1.11 *Man definiert die folgenden Unterräume von $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$:*

- $c := \{x \in \ell^\infty; \lim_{n\to\infty} x_n$ *existiert in* $\mathbb{R}\}$.
- $c_0 := \{x \in \ell^\infty; \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$.
- $c_{00} := x \in \ell^\infty; \exists n \in \mathbb{N}$ *mit* $x_k = 0$ *für alle* $k \geq n$

Ist $(c, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ oder $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ Banachraum?

Aufgabe 1.12 *Zeigen Sie, dass $A : (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$, definiert durch $(Ax)_k = \frac{1}{1+k} x_k$, injektiv und beschränkt ist. Ist sie auch surjektiv?*

In den Beispielen gab es ℓ^2 und ℓ^∞. Man definiert für $p \in [1, \infty)$ der Vektorraum ℓ^p als die Menge aller reellen Folgen derart, dass

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty. \tag{1.8}$$

Nachdem man gezeigt hat, dass $\|\cdot\|_p$ die Eigenschaften einer Norm erfüllt, werden $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ für $p \in [1, \infty)$ normierte Vektorräume. Man kann sogar zeigen, dass sie Banachräume sind.

Definition 1.11 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und seien $U \subset W \subset V$. Man sagt, dass U **dicht** liegt in W, wenn es für alle $w \in W$ und $\varepsilon > 0$ ein $u \in U$ gibt mit $\|u - w\| < \varepsilon$.*

Definition 1.12 *Wenn ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ eine abzählbare dichte Teilmenge hat, dann nennt man $(V, \|\cdot\|)$ **separabel**.*

Aufgabe 1.13 *Als Mengen hat man $c_{00} \subset \ell^2 \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$.*

1. *Liegt c_{00} dicht in $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$?*
2. *Liegt ℓ^2 dicht in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$?*
3. *Liegt c_{00} dicht in $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$?*

Aufgabe 1.14 *Ist $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ separabel?*

Aufgabe 1.15 *Zeigen Sie:* $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ *ist separabel.*

Beispiel 1.13 *Der Raum* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *ist nicht separabel. Wenn* $D := \left\{x^{(n)}; n \in \mathbb{N}^+\right\}$ *eine abzählbare dichte Teilmenge wäre, dann betrachte* x^**, definiert durch*

$$x_k^* = \begin{cases} -1 & \text{wenn } x_k^{(k)} \geq 0, \\ 1 & \text{wenn } x_k^{(k)} < 0. \end{cases}$$

Es gilt $x^* \in \ell^\infty$ *und*

$$\left\|x^{(n)} - x^*\right\|_\infty \geq \left|x_n^{(n)} - x_n^*\right| \geq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}^+$*. Also kommt kein Element in* D *näher als* 1 *zu* x^**. Für* $\varepsilon \in (0,1)$ *ist die Definition nicht erfüllt.*

Aufgabe 1.16 *Wir betrachten für Folgen* $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ *mit* $x_k \in \mathbb{R}$ *den Operator* A_{Cesaro}*, definiert durch*

$$A_{Cesaro}x =: y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \text{ mit } y_k = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} x_n.$$

Es folgt, dass $x = A_{Cesaro}^{-1}y$*, wenn* $x_1 = y_1$ *und*

$$x_k = ky_k - (k-1)\,y_{k-1} \text{ für } k \geq 2.$$

1. *Berechnen Sie* $\lim_{k\to\infty} (A_{Cesaro}x)_k$ *für* $x_k = (-1)^{k+1}$.

   Zeigen Sie:

2. A_{Cesaro}^{-1} *ist Links- und Rechtsinverse von* A_{Cesaro}*;*
3. $A_{Cesaro} : (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *ist ein beschränkter Operator;*
4. $A_{Cesaro}(c) \subset c$ *mit* c *der Teilmenge in* ℓ_∞ *der konvergenten Folgen.*
5. *Ist* $(A_{Cesaro})^{-1} : (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *wohl-definiert?*

Aufgabe 1.17 1. *Zeigen Sie, dass*

$$A_{Cesaro} : (\ell_2, \|\cdot\|_2) \to (\ell_2, \|\cdot\|_2)$$

ein beschränkter Operator ist.

2. *Sei* $x \in \ell_2$ *definiert durch* $x_k = \frac{1}{k}(-1)^{k+1}$ *für* $k \in \mathbb{N}^+$.
   Gilt $x \in A_{Cesaro}(\ell_2)$*?*

3. *Ist*

$$(A_{Cesaro})^{-1} : (A_{Cesaro}(\ell_2), \|\cdot\|_2) \to (\ell_2, \|\cdot\|_2)$$

   ein beschränkter Operator?

Kapitel 2

Verallgemeinerte Normen

2.1 Distanz und Seminorm

Auf dem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ kann man direkt eine Distanz definieren:

$$d(x,y) = \|x-y\| \text{ für } x,y \in V.$$

Eine Distanz führt jedoch nicht immer zu einer Norm, weil die Homogenität nicht gilt.

Definition 2.1 *Eine* ***Distanz*** *auf der Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Positivität: für alle $x,y \in X$ gilt*

$$d(x,y) \geq 0 \text{ und } d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

2. *Symmetrie: für alle $x,y \in X$ gilt*

$$d(x,y) = d(y,x).$$

3. *Die Dreiecksungleichung gilt: für alle $x,y,z \in X$ folgt*

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Definition 2.2 *Wenn d eine Distanz auf der Menge X ist, heißt (X,d) ein* ***metrischer Raum****.*

Definition 2.3 *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wenn jede Cauchy-Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert, dann nennt man (X,d) ein* ***Fréchet-Raum****.*

Die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ist Cauchy in (X,d), wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass

$$n,m \geq M_\varepsilon \implies d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ist konvergent in (X,d), wenn es $x_\infty \in X$ gibt und für alle $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass

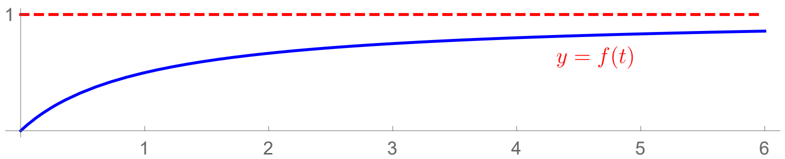
$$n \geq M_\varepsilon \implies d(x_n,x_\infty) < \varepsilon.$$

Beispiel 2.4 *Betrachten wir $\mathbb{R}^\infty$ als die Menge aller Folgen $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ mit $x_k \in \mathbb{R}$, dann ist*

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \tag{2.1}$$

eine Distanz auf $\mathbb{R}^\infty$. Dies werden wir jetzt zeigen und dazu betrachten wir

$$f : [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ mit } f(t) = \frac{t}{1+t}.$$



Diese Funktion ist wachsend, beschränkt nach oben durch 1 und außerdem gilt für $s,t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(t+s) &= \frac{t+s}{1+t+s} = \frac{t}{1+t+s} + \frac{s}{1+t+s} \\ &\leq \frac{t}{1+t} + \frac{s}{1+s} = f(t) + f(s). \end{aligned}$$

Weil $f(t) < 1$ für $t \in [0,\infty)$ ist die Formel in (2.1) konvergent und deshalb wohldefiniert für alle $x, y \in \mathbb{R}^\infty$. Die ersten beiden Bedingungen in Definition 2.1 sind sofort erfüllt. Für die dritte Bedingung verwenden wir:

1) die Dreiecksungleichung für $|\cdot|$, nämlich

$$|x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k|;$$

2) Dass f wachsend ist und dies impliziert

$$f(|x_k - z_k|) \leq f(|x_k - y_k| + |y_k - z_k|);$$

3) Die obige Eigenschaft in der Form

$$f(|x_k - y_k| + |y_k - z_k|) \leq f(|x_k - y_k|) + f(|y_k - z_k|).$$

Damit ist die Dreiecksungleichung für d bewiesen.

. . . .

Aufgabe 2.1 *Gibt es eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ mit $a_k > 0$ derart, dass $\|\cdot\| : \mathbb{R}^\infty \to [0,\infty)$, definiert durch*

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k |x_k| \quad \text{oder} \quad \|x\| = \max_{k\in\mathbb{N}^+} a_k |x_k|$$

auf $\mathbb{R}^\infty$ eine Norm ist?

Definition 2.5 *Sei V ein reeller Vektorraum. Dann heißt $p : V \to [0,\infty)$ eine* ***Seminorm****, wenn*

1. *$p(x) \geq 0$ für alle $x \in V$;*
2. *$p(tx) = |t|\, p(x)$ für alle $x \in V$ und $t \in \mathbb{R}$;*
3. *$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in V$.*

Besseres Deutsch wäre wahrscheinlich Halbnorm. In den meisten Sprachen wird jedoch „semi“ verwendet.

Definition 2.6 *Eine Familie $\{p_k; k \in \mathbb{N}\}$ von Seminormen auf V heißt* ***separierend****, wenn aus $p_k(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt, dass $x = 0$.*

Lemma 2.7 *Wenn $\{p_k; k \in \mathbb{N}^+\}$ eine separierende Familie von Seminormen auf V ist, dann ist $d : V \times V \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}$$

eine Distanz für V.

Beweis. Die Ideen für einen Beweis finden Sie in Beispiel 2.4, bei dem Sie verwenden, dass

$$p_k(x-z) \le p_k(x-y) + p_k(y-z)$$

statt $|x_k - z_k| \le |x_k - y_k| + |y_k - z_k|$. ■

. . . .

Aufgabe 2.2 *Zeigen Sie, dass $\{p_n; n \in \mathbb{N}^+\}$, für Folgen $x \in \mathbb{R}^\infty$ definiert durch $p_n(x) = \sum_{j=1}^n |x_j|$, eine separierende Familie von Seminormen für $\mathbb{R}^\infty$ ist.*

Aufgabe 2.3 *Sei $\mathbb{R}^\infty$ die Menge aller Folgen $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ mit $x_k \in \mathbb{R}$ und sei $\{p_n; n \in \mathbb{N}^+\}$ wie in der letzten Aufgabe und d wie in Lemma 2.7. Ist $(\mathbb{R}^\infty, d)$ ein Fréchet-Raum?*

. . . .

Beispiel 2.8 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Mit $C(I)$ notiert man die Menge der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$.*

Wenn I abgeschlossen ist und mehr als einen Punkt enthält, also $I = [a,b]$ mit $a < b$, dann ist $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ mit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

ein normierter Vektorraum und sogar ein Banachraum.

Wenn I nicht abgeschlossen ist, zum Beispiel $I = [a,b)$ mit $a < b$, dann gibt es keine natürliche Norm für $C[a,b)$. Defniert man $\{p_n; n \in \mathbb{N}^+\}$ durch

$$p_n(f) = \sup_{x\in[a,b-1/n]} |f(x)|$$

und d wie in Lemma 2.7, dann ist $(C[a,b), d)$ ein metrischer Raum und sogar ein Fréchet-Raum.

. . . .

Aufgabe 2.4 *Sei $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass f_n konvergiert in $(C[0,1), d)$ und nicht in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Die Distanz d ist definiert mittels der Seminormen aus dem letzten Beispiel.*

2.2 Stetige lineare Operatoren

In Definition 1.4 findet man, wie beschränkte lineare Operatoren definiert sind.

Theorem 2.9 (Linear beschränkt ist stetig)
Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte reelle Vektorräume und sei $A : V_1 \to V_2$ linear. Dann gilt:

$$A \text{ ist linear beschränkt} \Longleftrightarrow A \text{ ist stetig.}$$

Beweis. 1) ($\Rightarrow$) Wenn A beschränkt ist, dann nehme

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon \left(\|A\|_{V_1 \to V_2} + 1\right)^{-1}$$

in der Stetigkeitsaussage und verwende die Linearität:
Sei $\varepsilon > 0$ und es gilt für $\|x - y\|_1 < \delta_\varepsilon$, dass

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\|_2 &= \|A(x-y)\|_2 \\ &\leq \|A\|_{V_1 \to V_2} \|x - y\|_1 \leq \varepsilon \tfrac{\|A\|_{V_1 \to V_2}}{\|A\|_{V_1 \to V_2} + 1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

2) ($\Leftarrow$) Wenn A stetig ist, dann auch in 0. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ mit zugehörigem $\delta_\varepsilon > 0$ gilt dann, dass

$$\|Ax\|_2 = \delta_\varepsilon^{-1} \|x\|_1 \left\| A\left(\delta_\varepsilon \frac{x}{\|x\|_1}\right) \right\| \leq \delta_\varepsilon^{-1} \|x\|_1 \varepsilon$$

und so $\|A\|_{V_1 \to V_2} \leq \varepsilon \delta_\varepsilon^{-1}$. ■

Aufgabe 2.5 *Sei c und c_{00} wie in Aufgabe 1.11. Betrachte $A : c_{00} \to c$, definiert durch*

$$A(x_1, x_2, x_3 \dots) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots).$$

1. *Zeigen Sie, dass*

$$A : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c, \|\cdot\|_\infty)$$

wohldefiniert ist.

2. A ist linear. Ist dieses A auch stetig?

3. Beantworten Sie die gleichen Fragen für

$$A : (c_{00}, \|\cdot\|_1) \to (c, \|\cdot\|_\infty) .$$

Theorem 2.10 *Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte reelle Vektorräume und sei $BL(V_1; V_2)$ die Menge aller beschränkten linearen Abbildungen von V_1 nach V_2. Dann gilt:*

1. *$\left(BL(V_1; V_2), \|\cdot\|_{V_1\to V_2}\right)$ ist ein normierter Vektorraum.*
2. *Wenn $(V_2, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum ist, dann ist auch $\left(BL(V_1; V_2), \|\cdot\|_{V_1\to V_2}\right)$ ein Banachraum.*

Beweis. zu 1. $BL(V_1; V_2)$ ist ein Vektorraum mittels

$$(c_1A_1 + c_2A_2)(x) = c_1A_1(x) + c_2A_2(x)$$

für alle $A_1, A_2 \in BL(V_1; V_2)$.

Wir zeigen als nächstes, dass $\|\cdot\|_{V_1\to V_2}$ eine Norm ist:
a) $\|A\|_{V_1\to V_2} \geq 0$ und $\|A\|_{V_1\to V_2} = 0$ impliziert, dass $Ax = 0$ für alle $x \in V_1$, also, dass $A = 0$.
b) Sei $t \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|tA\|_{V_1\to V_2} &= \sup\left\{\frac{\|tAx\|_2}{\|x\|_1}; x \in V_1 \setminus \{0\}\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{|t|\,\|Ax\|_2}{\|x\|_1}; x \in V_1 \setminus \{0\}\right\} = |t|\,\|A\|_{V_1\to V_2} .\end{aligned}$$

c) Ähnlich verwendet man die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_2$ und die Linearität des Operators, um die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_{V_1\to V_2}$ herzuleiten.

zu 2. Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge beschränkter linearer Operatoren. Dann folgt, dass für jedes $x \in V_1$ gilt

$$\|A_nx - A_mx\|_2 \leq \|A_n - A_m\|\,\|x\|_1$$

und das bedeutet, dass $\{A_nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V_2 ist und weil V_2 ein Banachraum ist, ist $\{A_nx\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent: Es gibt $y_x \in V_2$ mit $\lim_{n\to\infty} \|A_nx - y_x\| = 0$. Definiere

$$A_\infty x = y_x.$$

Dieser Operator A_∞ ist linear:

$$\begin{aligned}A_\infty(c_1x_1 + c_2x_2) &= \lim_{n\to\infty} A_n(c_1x_1 + c_2x_2)\\ &= \lim_{n\to\infty}(c_1A_nx_1 + c_2A_nx_2)\\ &= c_1\lim_{n\to\infty} A_nx_1 + c_2\lim_{n\to\infty} A_nx_2 = c_1A_\infty x_1 + c_2A_\infty x_2\end{aligned}$$

und beschränkt: Weil eine Norm stetig ist, folgt für $x \in V_1$, dass

$$\begin{aligned}\|A_\infty x\|_2 &= \left\|\lim_{n\to\infty} A_nx\right\|_2 = \lim_{n\to\infty}\|A_nx\|_2\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\|A_n\|_{V_1\to V_2}\|x\|_1 \leq \left(\|A_{M_1}\|_{V_1\to V_2} + 1\right)\|x\|_1 .\end{aligned}$$

Hier ist M_1 derart, dass für $n, m \geq M_1$ gilt, dass $\|A_n - A_m\|_{V_1\to V_2} \leq 1$, und deshalb gilt für $n \geq M_1$ mit der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned}\|A_n\|_{V_1\to V_2} &\leq \|A_n - A_{M_1}\|_{V_1\to V_2} + \|A_{M_1}\|_{V_1\to V_2}\\ &\leq 1 + \|A_{M_1}\|_{V_1\to V_2} .\end{aligned}$$

So folgt $\|A_\infty\|_{V_1\to V_2} \leq 1 + \|A_{M_1}\|_{V_1\to V_2}$. ■

Beispiel 2.11 *Wenn wir den Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$ betrachten für Funktionen, die auf $[0,1]$ definiert sind, dann brauchen wir differenzierbare Funktionen. Wohldefiniert ist zum Beispiel*

$$\frac{d}{dx} : C^1\left[0,1\right] \to C\left[0,1\right].$$

In 0 und 1 ist hier die einseitige Ableitung gemeint.

Auf die Menge $C^1[0,1]$ der stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist die Standardnorm definiert durch

$$\|f\|_{C^1[0,1]} := \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Der Operator

$$\frac{d}{dx} : \left(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1[0,1]}\right) \to \left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$$

mit $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ ist dann linear und beschränkt:

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d}{dx}\right\|_{C^1[0,1]\to C[0,1]} &= \sup_{0\neq f\in C^1[0,1]} \frac{\left\|\frac{d}{dx} f\right\|_{C[0,1]}}{\|f\|_{C^1[0,1]}} \\ &= \sup_{0\neq f\in C^1[0,1]} \frac{\|f'\|_\infty}{\|f'\|_\infty + \|f\|_\infty} \leq 1. \end{aligned}$$

Man kann $C^1[0,1]$ auch als eine Teilmenge von $C[0,1]$ auffassen. Der Operator

$$\frac{d}{dx} : \left(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\right) \to \left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$$

ist noch immer linear, jedoch nicht beschränkt. Man schreibt in dem Fall:

$$\frac{d}{dx} : C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$$

und

$$\left\|\frac{d}{dx}\right\|_{C^1[0,1]\subset C[0,1]\to C[0,1]} = \sup_{0\neq f\in C^1[0,1]} \frac{\left\|\frac{d}{dx} f\right\|_{C[0,1]}}{\|f\|_{C[0,1]}} =$$

$$\sup_{0\neq f\in C^1[0,1]} \frac{\|f'\|_\infty}{\|f\|_\infty} \geq \sup_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{\|k\cos(k\ \cdot)\|_\infty}{\|\sin(k\ \cdot)\|_\infty} \geq \sup_{k\in\mathbb{N}^+} k = \infty.$$

. . . .

Aufgabe 2.6 $\left(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ *und* $\left(C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1[0,1]}\right)$ *sind Banachräume. Zeigen Sie, dass $\left(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ kein Banachraum ist.*

. . . .

Beispiel 2.12 *Man nennt eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, wenn Ω offen und zusammenhängend ist.*
Für $p \in [1,\infty)$ und Ω ein Gebiet definiert man $L^p(\Omega)$ als die

Menge aller Lebesgue-messbaren Funktionenklassen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\lambda\right)^{1/p} < \infty.$$

Zwei Funktionen f_1 und f_2 liegen in der gleichen Funktionenklasse f, wenn sie fast überall gleich sind. Das brauchte man, damit $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ eine Norm ist. Da ein Integral Funktionen, die fast überall gleich sind, nicht unterscheidet, wäre $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ für Funktionen nur eine Seminorm. Genaueres findet man in Analysis 3. Wenn Sie den Stoff nicht parat haben, dann lesen Sie bitte

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Für $f \in C(\Omega)$ stimmen beide Integrale überein.

Auch $L^\infty(\Omega)$ wird definiert, nämlich als die Menge aller Lebesgue-messbaren Funktionenklassen mit

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \underset{\Omega}{\text{ess-sup}}\, |f| < \infty.$$

Für $f \in C(\Omega)$, die stetigen Funktionen auf Ω, sind $\sup |f|$ und ess-sup für die Klasse von $|f|$ gleich:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

. . . .

Aufgabe 2.7 *Sei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ für $n \in \mathbb{N}^+$, und sei $p \in [1,\infty]$. Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktionen:*

1. $f_1 : B_1(0) \to \mathbb{R}$, *definiert durch* $f_1(x) = \left(1 - \|x\|^2\right)^\alpha$,
2. $f_2 : B_1(0) \to \mathbb{R}$, *definiert durch* $f_2(x) = \|x\|^\alpha$.

$$f_1 \in L^p(B_1(0)) \iff \boxed{},$$
$$f_2 \in L^p(B_1(0)) \iff \boxed{}.$$

Ergänzen Sie auch

$$f_1 \in L^\infty(B_1(0)) \iff \boxed{},$$
$$f_2 \in L^\infty(B_1(0)) \iff \boxed{}.$$

Hinweis: vielleicht passt für den Fall $p \in [1,\infty)$ irgendwo

$$a)\ \alpha > \frac{-1}{p} \text{ und } b)\ \alpha > \frac{-n}{p}.$$

2.3 (Un)endliche Dimensionen

Sei V ein reeller Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Man definiert

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_n\} := \left\{\sum\nolimits_{k=1}^n c_k v_k; c_k \in \mathbb{R}\right\}$$

und nennt dies die **lineare Hülle** von $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sie ist ein Untervektorraum oder Teilraum von V.

Definition 2.13 *Sei $n \in \mathbb{N}^+$.*

- *Ein Vektorraum V heißt n-**dimensional**, wenn es $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ gibt, die*
  1. *unabhängig sind, und*

2. V aufspannen: $V = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

- *In dem Fall nennt man* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *eine **Basis** für V und schreibt* $\operatorname{Dim}(V) = n$.

Den Vektorraum V nennt man endlich dimensional, wenn so ein $n \in \mathbb{N}^+$ existiert. Wenn es so ein n nicht gibt, heißt V unendlich dimensional.

....

Aufgabe 2.8 *Wann heißt $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ unabhängig? Wann wird V durch $\{v_1, \dots, v_n\}$ aufgespannt?*

Definition 2.14 *Zwei normierte Vektorräume* $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *und* $(V_2, \|\cdot\|_2)$ *heißen **homeomorph**, wenn es eine bijektive lineare Abbildung $A : V_1 \to V_2$ gibt mit A und A^{-1} stetig.*

Theorem 2.15 *Sei* $(V, \|\cdot\|_V)$ *ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ derart, dass* $(V, \|\cdot\|_V)$ *homeomorph ist zu* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis für V und definiere die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to V$ durch

$$A(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.$$

Weil $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis für V ist, kann man jedes $v \in V$ als eine solche Linearkombination schreiben und außerdem gibt es für jedes v nur eine solche Linearkombination. Das bedeutet, dass A bijektiv ist.

Dass A linear beschränkt ist, folgt aus

$$\begin{aligned}\|A(x_1, \dots, x_n)\|_V &\le |x_1| \|v_1\|_V + \dots + |x_n| \|v_n\|_V \\ &\le \left(\max_{1\le k\le n} \|v_k\|_V\right) \|x\|,\end{aligned}$$

und A ist deshalb stetig.

Auch A^{-1} ist linear und beschränkt: Die Linearität von A impliziert die von A^{-1}: Sei $v^{(a)} = Ax^{(a)}$ und $v^{(b)} = Ax^{(b)}$, so folgt

$$\begin{aligned}A^{-1}\left(c_a v^{(a)} + c_b v^{(b)}\right) &= A^{-1}\left(c_a A x^{(a)} + c_b A x^{(b)}\right) \\ &= A^{-1} A\left(c_a x^{(a)} + c_b x^{(b)}\right) = c_a x^{(a)} + c_b x^{(b)} \\ &= c_a A^{-1} v^{(a)} + c_b A^{-1} v^{(b)}.\end{aligned}$$

Der schwierigste Teil folgt als letztes, nämlich zu zeigen, dass A^{-1} linear beschränkt ist und dies beweisen mittels Widerspruch. Wenn A^{-1} nicht beschränkt ist, dann gibt es nach Definition 1.2 eine Folge $\{v^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ mit

$$\frac{\left\|A^{-1} v^{(k)}\right\|}{\left\|v^{(k)}\right\|_V} \to \infty. \tag{2.2}$$

Man darf annehmen, dass $\left\|A^{-1}v^{(k)}\right\| \neq 0$ und setzt

$$x^{(k)} = \frac{A^{-1}v^{(k)}}{\|A^{-1}v^{(k)}\|} \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt $\left\|x^{(k)}\right\| = 1$ und wegen Bolzano-Weierstraß hat $\left\{x^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\left\{x^{(k_m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$. Das bedeutet, es gibt $x^\infty \in \mathbb{R}^n$ mit $\left\|x^{(k_m)} - x^\infty\right\| \to 0$. Es folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned}\|x^\infty\| &\geq \lim_{m\to\infty}\left(\left\|x^{(k_m)}\right\| - \left\|x^{(k_m)} - x^\infty\right\|\right)\\ &= 1 - \lim_{m\to\infty}\left\|x^\infty - x^{(k_m)}\right\| = 1.\end{aligned}$$

Also folgt $x^\infty \neq 0$. Weil A linear und stetig ist, gilt wegen (2.2), dass

$$\begin{aligned}\|Ax^\infty\| &= \lim_{m\to\infty}\left\|Ax^{(k_m)}\right\| = \lim_{m\to\infty}\left\|\frac{v^{(k_m)}}{\|A^{-1}v^{(k_m)}\|}\right\|\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{\left\|v^{(k_m)}\right\|}{\|A^{-1}v^{(k_m)}\|} = 0 \in V.\end{aligned}$$

So findet man, dass $Ax^\infty = 0$ für $x^\infty \neq 0$ und dies widerspricht der Injektivität. ■

Korollar 2.16 *Für endlich dimensionale reelle Vektorräume sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. Wenn V Dimension n hat, verwenden Sie, dass $(V, \|\cdot\|_1)$ und $(V, \|\cdot\|_2)$ homeomorph zu $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ sind. ■

. . . .

Aufgabe 2.9 *Geben Sie einen detaillierten Beweis dieses Korollars.*

Definition 2.17 *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein unendlich dimensionaler reeller Banachraum. Dann heißt*

$$\left\{v_n; n \in \mathbb{N}^+\right\} \subset V$$

eine ***Schauderbasis*** *für V, wenn für jedes $v \in V$ eine eindeutige Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R}$ existiert derart, dass*

$$\lim_{m\to\infty}\left\|v - \sum\nolimits_{n=1}^{m} x_n v_n\right\|_V = 0.$$

. . . .

Aufgabe 2.10 *Geben Sie eine Schauderbasis an für:*

1) $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ 2) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 3) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Für c_0 siehe Aufgabe 1.11.

2.4 Kompakte Mengen

In den nächsten drei Definitionen ist $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter reeller Vektorraum und K eine Teilmenge von V.

Definition 2.18 *Die Menge K heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in K eine Teilfolge hat, die konvergiert zu einem Element von K.*

Es gibt auch die Definition für überdeckungskompakt. Man sagt $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ überdeckt K, wenn

$$\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \supset K.$$

Definition 2.19 *Die Menge K heißt **überdeckungskompakt**, wenn jede Überdeckung $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ von K mit offenen Mengen eine endliche Teilmenge $\{\mathcal{O}_{i_k}\}_{k=1}^m$ besitzt, die K schon überdeckt.*

Für einen metrischen Raum sind beide Definitionen äquivalent und es wird nur das Wort **kompakt** verwendet. Es gibt auch den Begriff präkompakt:

Definition 2.20 *Die Menge K heißt **präkompakt**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele Kugeln $B_\varepsilon(v_i)$ existieren derart, dass*

$$\bigcup_{i\in I} B_\varepsilon(v_i) \supset K.$$

Lemma 2.21 *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter reeller Vektorraum und sei $K \subset V$. Die Menge K ist präkompakt und abgeschlossen, genau dann, wenn K kompakt ist.*

Beweis. $\Rightarrow$) Sei $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Wenn K präkompakt ist, ist auch jede Teilmenge von K präkompakt. Weil K präkompakt ist, gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung $\{B_{2^{-k}}(v_{j,k})\}_{j=1}^{n_k}$ von K, bei der wir annehmen dürfen, dass $B_{2^{-k}}(v_{j,k}) \cap K \neq \emptyset$. Wenn $B_{2^{-k}}(v_{j,k}) \cap K$ für jedes $j \in \{1, \dots, n_k\}$ in der Vereinigung endlich vieler $\mathcal{O}_i$ liegen würde, wären wir fertig, denn dann würde K überdeckt werden von diesen endlich vielen $\mathcal{O}_i$. Nehmen wir an, dies ist nicht der Fall und zwar für jedes k gibt es ein solches j_k, bei dem $B_{2^{-k}}(v_{j_k,k})$ unendlich viele $\mathcal{O}_i$ braucht. Fangen wir an bei $k = 1$.

- Es hat $v_{j_1,1}$ mit $B_{1/2}(v_{j_1,1}) \cap K \neq \emptyset$ und $B_{1/2}(v_{j_1,1}) \cap K$ liegt nicht in der Vereinigung von nur endlich vieler $\mathcal{O}_i$.
- Es hat $v_{j_2,2}$ mit $B_{1/4}(v_{j_2,2}) \cap B_{1/2}(v_{j_1,1}) \cap K \neq \emptyset$ und $B_{1/4}(v_{j_2,2}) \cap K$ liegt nicht in der Vereinigung von nur endlich vieler $\mathcal{O}_i$.
- Und so weiter.

Die Folge $\{v_{j_k,k}\}$ ist Cauchy und weil es $x_k \in K$ gibt mit $\|v_{j_k,k} - x_k\| < 2^{-k}$ und K abgeschlossen ist, gilt $\lim_{k\to\infty} v_{j_k,k} = v_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k \in K$. Weil K von $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ überdeckt wird, gibt es $i_0 \in I$ mit $v_\infty \in \mathcal{O}_{i_0}$ und weil $\mathcal{O}_{i_0}$ offen ist, gibt es $B_{\varepsilon_0}(v_\infty) \subset \mathcal{O}_{i_0}$. Weil $\lim_{k\to\infty} v_{j_k,k} = v_\infty$ gilt, folgt für k genügend groß, dass $B_{2^{-k}}(v_{j_k,k}) \subset B_{\varepsilon_0}(v_\infty) \subset \mathcal{O}_{i_0}$, ein Widerspruch.

$\Leftarrow$) Wenn K kompakt ist, dann konvergieren Cauchy-Folgen in K und das heißt, K ist abgeschlossen. Überdeckungskompakt sagt, dass endlich viele Kugeln schon reichen für die Überdeckung. ■

Theorem 2.22 *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter reeller Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

- *V ist endlich dimensional.*
- *Die abgeschlossene Einheitskugel $\{v \in V; \|v\|_V \leq 1\}$ von V ist kompakt.*

Beweis. Zur Erinnerung: Eine Teilmenge K eines normierten Vektorraums heißt kompakt, wenn jede Folge $\{v^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge besitzt. Außerdem schreiben wir $B_r(w) = \{v \in V; \|v - w\|_V < r\}$.

($\Rightarrow$) Diese Richtung folgt aus Theorem 2.15.
Sei $A : V \to \mathbb{R}^n$ ein Homeomorphismus. Man zeigt direkt, dass

$$K := A(\overline{B_1(0)}) \subset \mathbb{R}^n$$

beschränkt und abgeschlossen ist in $\mathbb{R}^n$. In $\mathbb{R}^n$ impliziert beschränkt und abgeschlossen die Folgenkompaktheit. Für $\{v^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_1(0)}$ gilt $\{Av^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ und diese Folge hat eine konvergente Teilfolge:

$$\lim_{m\to\infty} Av^{(k_m)} = x^\infty \in K.$$

Dann gilt wegen der Stetigkeit von A^{-1} auch:

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} v^{(k_m)} &= \lim_{m\to\infty} A^{-1}Av^{(k_m)} = A^{-1} \lim_{m\to\infty} Av^{(k_m)} \\ &= A^{-1}x^\infty \in \overline{B_1(0)}.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Man kann $\overline{B_1(0)}$ mit endlich vielen Kugeln $B_1(p_k)$ mit $p_k \in \overline{B_1(0)}$ überdecken. Man nehme $p_1 \in \overline{B_1(0)}$ beliebig und man wählt iterativ für $k \geq 1$:

$$p_{k+1} \in \overline{B_1(0)} \setminus \bigcup_{1\leq m\leq k} B_1(p_m).$$

Diesen Schritt kann man nur endlich oft machen. Denn sonst wäre $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \overline{B_1(0)}$ eine Folge ohne konvergente Teilfolge, weil $\|p_k - p_m\| \geq 1$ für alle $k \neq m$. Es gibt also $k^* \in \mathbb{N}$ mit $\{p_1, \ldots, p_{k^*}\} \in \overline{B_1(0)}$ und

$$\overline{B_1(0)} \subset \bigcup_{1\leq m\leq k^*} B_1(p_m). \tag{2.3}$$

Wir setzen $V_e = \operatorname{Span}\{p_1, \ldots, p_{k^*}\}$ und behaupten $V = V_e$. Dies beweisen wir durch Widerspruch und nehmen an, dass $v \in V \setminus V_e$ existiert. Sei $f : V_e \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(w) = \|v - w\|_V.$$

Es gilt $f(0) = \|v\|_V > 0$ und für $\|w\|_V \geq 2\|v\|_V$ folgt mit der Dreiecksungleichung, dass

$$f(w) = \|w - v\|_V \geq \|w\|_V - \|v\|_V \geq \|v\|_V = f(0). \tag{2.4}$$

Weil $K := V_e \cap \overline{B_2(0)}$ endlich dimensional, beschränkt und abgeschlossen ist und weil f stetig ist, hat f ein Minimum auf K, das wegen (2.4) sogar ein globales Minimum auf V_e ist. Nennen wir eine solche Minimalstelle w_v. Es gilt $f(w_v) > 0$, denn $f(w_v) = 0$ bedeutet $v = w_v \in V_e$, ein Widerspruch. Also gilt für alle $w \in V_e$, dass

$$\|v - w\|_V \geq \|v - w_v\|_V > 0.$$

Es gilt also auch für $1 \leq m \leq k^*$, dass

$$\left\|v - w_v - \|v - w_v\|_V p_m\right\|_V \geq \|v - w_v\|_V$$

und dies ergibt

$$\left\|\frac{v - w_v}{\|v - w_v\|_V} - p_m\right\|_V \geq 1 \text{ für alle } m \in \{1, \ldots, k^*\}.$$

Weil $\frac{v-w_v}{\|v-w_v\|_V} \in \overline{B_1(0)}$, widerspricht es der Überdeckung in (2.3). ∎

. . . .

Aufgabe 2.11 *Sei* $V = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ *ein Vektorraum mit Norm* $\|\cdot\|_V$. *Sei* $A : \mathbb{R}^n \to V$ *definiert durch*

$$A(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.$$

Definiere $K := \{x \in \mathbb{R}^n ; \|Ax\|_V \le 1\}$. *Zeigen Sie:*

$$\operatorname{Dim}(V) = n \Leftrightarrow K \text{ ist kompakt.}$$

Kapitel 3

Das Auswahlaxiom und Hahn-Banach

3.1 Ordnung und Auswahlaxiom

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \neq y$, gilt entweder $x < y$ oder $y < x$. Auf $\mathbb{R}^2$ kann man definieren, dass $(x_1, x_2) < (y_1, y_2)$ bedeutet $x_1 < y_1$ und $x_2 < y_2$, jedoch sieht man sofort, dass nicht für alle nicht-identischen Paare gilt, dass $x < y$ oder $y < x$, sogar nicht, dass $x \leq y$ oder $y \leq x$.

Definition 3.1 (Partielle Ordnung) *Die Menge P hat eine partielle Ordnung $\preceq$, wenn für alle $x, y, z \in P$ gilt:*

1. $x \preceq x$;
2. $x \preceq y$ *und* $y \preceq x$ *impliziert, dass* $x = y$;
3. $x \preceq y$ *und* $y \preceq z$ *impliziert, dass* $x \preceq z$.

Definition 3.2 (Totale Ordnung) *Die Menge P hat eine totale Ordnung $\preceq$, wenn $\preceq$ eine partielle Ordnung ist, für die außerdem gilt:*

4. $x \preceq y$ *oder* $y \preceq x$ *für alle* $x, y \in P$.

Sei P eine partiell geordnete Menge.

- Ein Element $s \in P$ heißt Oberschranke für $K \subset P$, wenn $x \preceq s$ für alle $x \in K$.
- Ein Element $x \in P$ heißt maximal, wenn kein $y \in P \backslash \{x\}$ existiert mit $x \preceq y$.

Theorem 3.3 (Das Lemma von Zorn) *Jede partiell geordnete Menge P, in der jede total geordnete Teilmenge eine Oberschranke in P hat, hat mindestens ein maximales Element.*

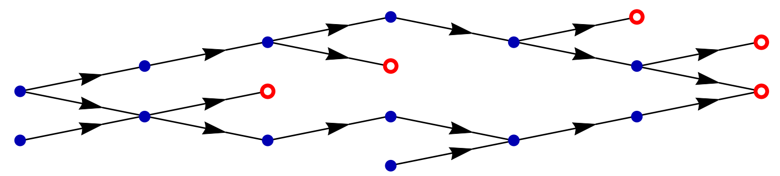


Abbildung 3.1: Partiell geordnete Punkte mit 5 maximalen Elementen

Aufgabe 3.1 *Definiere $\preceq$ auf $\mathbb{R}^2$ durch*

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ und } x_2 \leq y_2.$$

1. *Zeigen Sie, dass dies eine partielle Ordnung auf $\mathbb{R}^2$ ist.*
2. *Beschreiben Sie alle total geordneten Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.*
3. *Betrachte $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$ mit dieser Ordnung von $\mathbb{R}^2$. Welche sind die maximalen Elemente von $\overline{B_1(0)}$.*

Theorem 3.4 (Maximalitätsprinzip von Hausdorff) *Sei P eine durch $\preceq$ partiell geordnete Menge und sei $K \subset P$ eine durch $\preceq$ total geordnete Menge. Dann existiert mindestens eine größte durch $\preceq$ total geordnete Menge K_0 mit $K \subset K_0 \subset P$.*

Das Lemma von Zorn ist äquivalent zu dem Maximalitätsprinzip von Hausdorff, und auch mit dem Auswahlaxiom:

Axiom 3.5 (Das Auswahlaxiom) *Für jede Menge nichtleerer Mengen gibt es eine Auswahlfunktion.*

Definition 3.6 *Für $\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\}$ mit A_i eine Menge für jedes i in der Indexmenge I, heißt f eine Auswahlfunktion, wenn es für jedes $i \in I$ ein $a_i \in A_i$ existiert mit $f(A_i) = a_i$.*

Theorem 3.3, Theorem 3.4 und Axiom 3.5 sind äquivalent und das könnte ein wenig verwirrend sein. Ein Axiom kann man nicht beweisen (und ist bis jetzt nicht widerlegt worden), es sei denn, man nimmt stattdessen ein anderes Axiom an. In diesem Fall kann man eine dieser drei Aussagen annehmen und die beiden anderen daraus folgen lassen. Das bedeutet nicht, dass man für die Existenz eines maximalen Elements in einer geschickten Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ mit der obigen Ordnung das Auswahlaxiom braucht, denn das geht auch ohne. Wenn man das Axiom annimmt, dann folgt jedoch, dass das Lemma von Zorn bei jeder beliebigen partiellen Ordnung anzuwenden ist.

Wir werden die Äquivalenz dieser drei Aussagen nicht beweisen.

3.2 Hahn-Banach analytisch

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Definition 3.7 *Eine Funktion $p : V \to \mathbb{R}$ heißt*

1. *subadditiv: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in V$,*
2. *1-homogen: $p(tx) = tp(x)$ für alle $x \in V$ und $t \geq 0$.*

Bemerkung 3.7.1 *Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in V$ und $\theta \in (0,1)$ gilt, dass*

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

Wenn p Definition 3.7 erfüllt, dann ist p konvex, denn für alle $x, y \in V$ und $\theta \in (0,1)$ gilt:

$$\begin{aligned} p(\theta x + (1-\theta)y) &\leq p(\theta x) + p((1-\theta)y) \\ &= \theta p(x) + (1-\theta) p(y). \end{aligned}$$

Beispiel 3.8 *Die folgenden Funktionen haben diese beiden Eigenschaften:*

1. *Für $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ die Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$.*
2. *Für $\mathbb{R}$ die Funktion $p(x) = 2|x| + x$.*
3. *Für (V, d) ein metrischer Raum mit Ω eine beschränkte, offene und konvexe Menge mit $0 \in \Omega$, nehme*

   $$p(x) := \inf\left\{\lambda \geq 0; \lambda^{-1}x \in \Omega\right\}.$$

   Bemerke, dass wenn $(V, \|\cdot\|)$ für $\Omega = B_1(0)$ dies genau die Norm liefert.

Aufgabe 3.2 *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und sei $w \in V$ mit $\|w\| = 1$. Für welche $c \in \mathbb{R}$ erfüllt $p_c : V \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$p_c(v) = \|v\| + c\,|\langle v, w\rangle|$$

die Bedingungen in Definition 3.7?

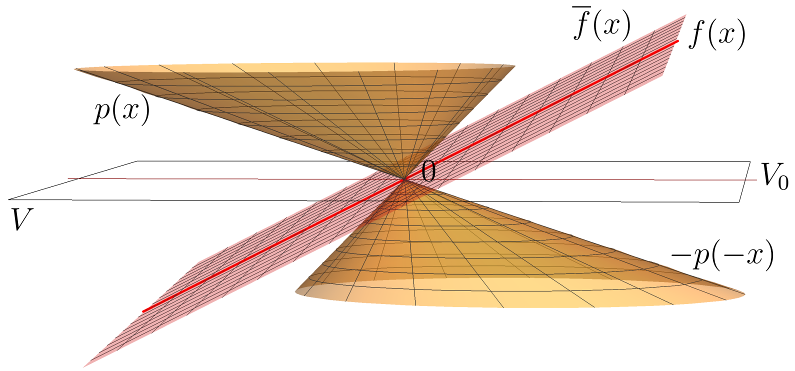


Abbildung 3.2: Skizze zu Hahn-Banach

Theorem 3.9 (Erweiterungssatz von Hahn-Banach) *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $p : V \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften in Definition 3.7. Sei V_0 ein Teilraum von V und sei $f : V_0 \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit*

$$f(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in V_0. \tag{3.1}$$

Dann existiert mindestens ein lineares Funktional $\bar{f} : V \to \mathbb{R}$, das f erweitert, mit

$$-p(-x) \leq \bar{f}(x) \leq p(x) \text{ für alle } x \in V. \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.9.1 *Die Funktion $\bar{f} : V \to \mathbb{R}$ mit $V_0 \subset V$ heißt eine Erweiterung von $f : V_0 \to \mathbb{R}$, wenn $\bar{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in V_0$.*

Beweis. Wenn $V_0 = V$ gilt, dann ist wenig zu beweisen, denn (3.1) impliziert $f(-x) \le p(-x)$ für alle $x \in V_0$ und dann auch, weil f linear ist, dass

$$-p(-x) \le -f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in V = V_0.$$

Schritt 1. Nehmen wir also an, dass $V_0 \neq V$ gilt. Dann gibt es $x_1 \in V \setminus V_0$ und

$$V_1 = \{x + tx_1; x \in V_0, t \in \mathbb{R}\}$$

ist echt größer als V_0. Für $x, y \in V_0$ gilt außerdem, dass

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \le p(x+y) \le p(x - x_1) + p(x_1 + y).$$

Also folgt für alle $x, y \in V_0$

$$f(x) - p(x - x_1) \le p(x_1 + y) - f(y). \tag{3.3}$$

Die rechte Seite hängt nicht von x ab, und das bedeutet, dass $\beta \in \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, man nehme $y = 0$, durch

$$\beta := \sup_{x \in V_0} \{f(x) - p(x - x_1)\} \le p(x_1).$$

Es folgt sogar, dass für alle $x, y \in V_0$

$$f(x) - p(x - x_1) \le \beta \le p(x_1 + y) - f(y). \tag{3.4}$$

Schritt 2. Man erweitert $f : V_0 \to \mathbb{R}$ nach $f_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ durch

$$f_1(x + tx_1) := f(x) + \beta t \text{ für } x \in V_0 \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Man zeigt direkt, dass die Funktion f_1 linear ist, weil die Zerlegung eindeutig ist und beide Teile linear sind. Auch findet man $f_1(x) \le p(x)$ für alle $x \in V_1$. Das letztere folgt für $t = 0$ direkt aus (3.1). Für $t > 0$ findet man es wie folgt: Die Ungleichungen in (3.4) implizieren

$$t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - p\left(\frac{x}{t} - x_1\right)\right) \le \beta t \le t\left(p\left(x_1 + \frac{x}{t}\right) - f\left(\frac{x}{t}\right)\right)$$

und aus der Linearität von f und der Homogenität von p folgt, dass für alle $x \in V_0$ und $t > 0$

$$f(x) - p(x - tx_1) \le \beta t \le p(x + tx_1) - f(x).$$

Dies impliziert für $t > 0$ und $x \in V_0$, dass

$$\begin{aligned} f_1(x - tx_1) &= f(x) - \beta t \le p(x - tx_1), \\ f_1(x + tx_1) &= f(x) + \beta t \le p(x + tx_1). \end{aligned}$$

Das Funktional f_1 ist also eine Erweiterung von f nach V_1 mit

$$f_1(x) \le p(x) \text{ für alle } x \in V_1.$$

Schritt 3. So kann man f erweitern zu einem linearen Funktional f_1 auf dem strikt größeren Teilraum V_1 und, wenn $V_1 \subsetneq V$, auf einem Teilraum V_2 mit $V_1 \subsetneq V_2 \subset V$, und trotzdem die Ungleichung in (3.1) erhalten.

Sei nun P die Menge aller Paare (V_i, ϕ_i) mit $V_i \supset V_0$ einem Teilraum von V und $\phi_i : V_i \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional derart, dass

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= f(x) \text{ für alle } x \in V_0, \\ \phi_i(x) &\le p(x) \text{ für alle } x \in V_i. \end{aligned}$$

Man kann P wie folgt (partiell) ordnen:

$$(V_i, \phi_i) \preceq (V_j, \phi_j)$$
$$\text{wenn } V_i \subset V_j \text{ und } \phi_i(x) = \phi_j(x) \text{ für } x \in V_i.$$

Mit dem Maximalitätsprinzip von Hausdorff folgt, dass es ein $(V_{\max}, \phi_{\max}) \in P$ gibt derart, dass $V_0 \subset V_{\max} \subset V$, dass $\phi_{\max}$ eine Erweiterung von f auf $V_{\max}$ ist, und $\phi_{\max}(x) \le p(x)$ für alle $x \in V_{\max}$. Wenn $V_{\max} \neq V$ ist, dann können wir $x_* \in V \setminus V_{\max}$ finden, und wie im zweiten Schritt die Funktion $\phi_{\max}$ erweitern auf

$$V_{\max+1} = \{x + t x_*; x \in V_{\max} \text{ und } t \in \mathbb{R}\}.$$

Dies widerspricht dem Maximalitätsprinzip, also gilt $V_{\max} = V$. ■

In dem Fall, dass $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist, und $p(x) = \|x\|$, liefert Hahn-Banach das folgende Ergebnis:

Theorem 3.10 (Funktionalerweiterung) *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei f eine stetige lineare Abbildung auf dem Teilraum V_0. Dann kann man f erweitern zu einer stetigen linearen Abbildung $\bar{f} : V \to \mathbb{R}$ mit der gleichen Norm:*

$$\begin{aligned}\|\bar{f}\|_{L(V;\mathbb{R})} &= \sup_{x\in V, \|x\|=1} \|\bar{f}(x)\| \\ &= \sup_{x\in V_0, \|x\|=1} \|f(x)\| = \|f\|_{L(V_0;\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Beweis. Eine stetige lineare Abbildung ist beschränkt und daher gilt:

$$f(x) \le p(x) := \|f\|_{L(V_0;\mathbb{R})} \|x\| \text{ für alle } x \in V_0.$$

Die Abbildung p erfüllt Definition 3.7. ■

Korollar 3.11 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dann gibt es für jedes Paar $x, y \in V$ mit $x \neq y$ ein stetiges lineares Funktional $\phi : V \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x) \neq \phi(y)$.*

Beweis. Betrachte $V_0 = \{t(x-y); t \in \mathbb{R}\}$ und definiere $f : V_0 \to \mathbb{R}$ durch $f(t(x-y)) = t$ und $p : V \to \mathbb{R}$ durch $p(z) = \frac{\|z\|}{\|x-y\|}$. Dann gilt $f(t(x-y)) = t \le |t| = p(t(x-y))$. Eine lineare Erweiterung von f auf V, deren Existenz durch Hahn-Banach gegeben ist, gibt uns ϕ. Weil $\phi(x) - \phi(y) = \phi(x-y) = f(x-y) = 1$, folgt $\phi(x) \neq \phi(y)$. ■

Korollar 3.12 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dann gibt es für jedes $x \in V$ ein stetiges lineares Funktional $\phi_x : V \to \mathbb{R}$ mit $\phi_x(x) = \|x\|$ und $\|\phi_x\| = 1$.*

Beweis. Wenn $x = 0$, dann ersetze x durch ein beliebiges $\tilde{x} \neq 0$. Für $x \neq 0$ betrachte $V_0 = \{tx; t \in \mathbb{R}\}$ und definiere $\phi : V_0 \to \mathbb{R}$ durch $\phi(tx) = t\|x\|$. Dieses ϕ ist linear und es gilt

$$\|\phi\|_{V_0\to\mathbb{R}} = \sup_{t\neq 0} \frac{|\phi(tx)|}{\|tx\|} = 1.$$

Nehme $p(v) = \|v\|$, bemerke $\phi(tx) \le p(tx)$ und erweitere dieses ϕ mit Hahn-Banach zu $\phi_x : V \to \mathbb{R}$. ■

. . . .

Aufgabe 3.3 *Zeigen Sie, dass eine stetige lineare Abbildung $L : (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ existiert derart, dass*

- *$|L(x)| \le \|x\|_\infty$ für alle $x \in \ell^\infty$ und,*
- *wenn für $x \in \ell^\infty$ der Limes existiert, dann gilt*

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Hinweis: Existiert so ein L auf $(c, \|\cdot\|_\infty)$?

3.3 Hahn-Banach geometrisch

Definition 3.13 *Sei V ein Vektorraum und $A \subset V$. Wenn für jedes Paar $v, w \in A$ gilt, dass*

$$[v, w] := \{\vartheta v + (1 - \vartheta) w; \vartheta \in [0, 1]\} \subset A,$$

dann nennt man die Menge A ***konvex****.*

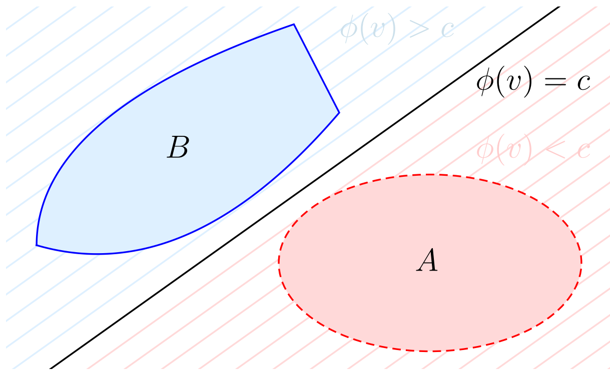


Abbildung 3.3: Zwei konvexe Mengen A und B werden getrennt durch ϕ. Auf den Geraden ist ϕ konstant.

Theorem 3.14 (Trennung von konvexen Mengen) *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein reeller normierter Vektorraum. Seien A, B nichtleere, konvexe und disjunkte Teilmengen von V, dann gilt:*

1. *Wenn A offen ist, dann gibt es eine beschränkte lineare Funktion $\phi : V \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ derart, dass*

$$\phi(a) < c \leq \phi(b) \text{ für alle } a \in A \text{ und } b \in B. \tag{3.5}$$

2. *Wenn A kompakt ist und B abgeschlossen, dann gibt es eine beschränkte lineare Funktion $\phi : V \to \mathbb{R}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ derart, dass*
$$\phi(a) \le c_1 < c_2 \le \phi(b) \text{ für alle } a \in A \text{ und } b \in B. \tag{3.6}$$

Aufgabe 3.4 *Man kann sogar in $\mathbb{R}^2$ ein Beispiel finden, das zeigt, dass die Bedingung „A, B beide abgeschlossen", nicht ausreicht für die zweite Folgerung. Geben Sie ein solches Beispiel an.*

Beweis. *1. Der erste Fall.*

1) Wir nehmen $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ und setzen $v_0 = b_0 - a_0$. Dann definiert man die Menge
$$C = \{v_0 + a - b; a \in A, b \in B\}.$$
Es gilt:

a) $0 \in C$: Man nehme $a = a_0$ und $b = b_0$.

b) C ist offen: Wenn $c \in C$, dann gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $c = v_0 + a - b$. Weil A offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $a \in B_\varepsilon(a) \subset A$ und dann auch
$$c = v_0 + a - b \in B_\varepsilon(v_0 + a - b) \subset C.$$

c) C ist konvex: Wenn $c_1, c_2 \in C$, dann gibt es zugehörige $a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B$. Man findet „c_ϑ"mittels „a_ϑ"und „b_ϑ".

d) $v_0 \notin C$: Wenn $v_0 \in C$, dann gibt es $a \in A, b \in B$ mit $v_0 = v_0 + a - b$. Dann folgt $a = b \in A \cap B$ und das ist ein Widerspruch.

2) Da $0 \in C$ und C offen ist, gibt es $\varepsilon_0 > 0$ derart, dass $B_{\varepsilon_0}(0) \subset C$ und also auch $B_{\|v\|}(0) \subset \varepsilon_0^{-1}\|v\| C$. Diese Eigenschaft hilft uns eine homogene Funktion $p : V \to \mathbb{R}$ wohl zu definieren durch
$$p(v) := \inf\{\lambda > 0; v \in \lambda C\} \le \varepsilon_0^{-1}\|v\|.$$
Weil C konvex ist, ist p subadditiv: Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt für jede $x, y \in V$ und $\varepsilon > 0$, dass
$$\tfrac{1}{p(x)+\varepsilon}x, \tfrac{1}{p(y)+\varepsilon}y \in C.$$
Mit $\vartheta = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ gilt wegen der Konvexität von C, dass
$$\tfrac{1}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}(x+y) = \vartheta\tfrac{1}{p(x)+\varepsilon}x + (1-\vartheta)\tfrac{1}{p(y)+\varepsilon}y \in C.$$
Dies impliziert, dass $p(x+y) \le p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ und weil dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, folgt
$$p(x+y) \le p(x) + p(y).$$

3) Auf $V_0 = \{tv_0; t \in \mathbb{R}\}$ definiert man $f(tv_0) = t$. Man bemerke, dass
$$\begin{aligned} f(tv_0) &= t \le tp(v_0) = p(tv_0) \text{ für } t \ge 0,\\ f(tv_0) &= t < 0 \le p(tv_0) \text{ für } t < 0.\end{aligned}$$
Dann kann man das Theorem von Hahn-Banach verwenden für die Existenz einer linearen Funktion $\phi : V \to \mathbb{R}$ mit
$$\phi(tv_0) = t \text{ und } -p(-v) \le \phi(v) \le p(v) \text{ für alle } v \in V.$$
Weil $|\phi(v)| \le \max_\pm |p(\pm v)| \le \varepsilon_0^{-1}\|v\|$ gilt, ist ϕ linear beschränkt und deshalb stetig.

4) Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt

$$\phi(v_0 + a - b) = \phi(v_0) + \phi(a) - \phi(b) = 1 + \phi(a) - \phi(b)$$

und weil $v_0 + a - b \in C$ und C offen ist, folgt

$$\phi(v_0 + a - b) \leq p(v_0 + a - b) < 1.$$

Kombiniert man beides, so folgt $\phi(a) < \phi(b)$. Definiere

$$c = \sup_{a \in A} \phi(a)$$

und man findet

$$\phi(a) \leq c \leq \phi(b).$$

Weil A offen ist, gilt $a + \varepsilon v_0 \in A$ für $\varepsilon > 0$ und genügend klein. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \phi(a + \varepsilon v_0) - \phi(\varepsilon v_0) = \\ &= \phi(a + \varepsilon v_0) - \varepsilon \leq c - \varepsilon < c. \end{aligned}$$

Also gilt (3.5).

2. Der zweite Fall.

Man definiert

$$\delta = \inf \{\|a - b\|; a \in A, b \in B\} \geq 0.$$

Dieses δ ist sogar strikt positiv. Wenn $\delta = 0$ wäre, dann gäbe es Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ mit $\lim_{n\to\infty} \|a_n - b_n\| = 0$. Weil A kompakt ist, hätte $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to a \in A$ für $k \to \infty$. Dann würde auch gelten, dass $b_{n_k} \to a \in B$ für $k \to \infty$, weil auch B abgeschlossen ist. Dies wäre ein Widerspruch.

Weil $\delta > 0$ gilt, ist $A_\delta := \bigcup_{a\in A} B_\delta(a)$ eine offene konvexe Menge, und disjunkt mit B. Man kann den ersten Fall benutzen mit C ersetzt durch

$$C_\delta = \{v_0 + a - b; a \in A_\delta, b \in B\}.$$

Man setze

$$c_1 := \max_{a\in A} \phi(a) \text{ und } c_2 := \sup_{a\in A_\delta} \phi(a).$$

Weil A kompakt ist, gibt es $a_m \in A$ mit $\sup_{a\in A} \phi(a) = \phi(a_m)$ und weil $a_m + \frac{1}{2}\delta v_0 \in A_\delta$ impliziert

$$\phi(a_m) + \tfrac{1}{2}\delta = \phi\left(a_m + \tfrac{1}{2}\delta v_0\right) \leq \sup_{a\in A_\delta} \phi(a),$$

folgt $c_1 < c_2$ und für alle $a \in A$ und $b \in B$, dass

$$\phi(a) \leq c_1 < c_2 \leq \phi(b),$$

die Aussage in 3.6. ■

. . . .

Aufgabe 3.5

1. *Zeigen Sie: Wenn A konvex ist, ist auch $\overline{A}$ konvex.*

2. *Geben Sie auch ein nicht-konvexes A an mit $\overline{A}$ konvex.*

Aufgabe 3.6 *Sei* $L \in BL\left(\left(V_1, \|\cdot\|_1\right); \left(V_2, \|\cdot\|_2\right)\right)$ *und sei* $A \subset V_1$ *konvex. Zeigen Sie, dass auch* $L(A)$ *konvex ist.*

Aufgabe 3.7
1. *Ist* $A = \{x \in \ell^2; \|x\|_2 < 1\}$ *eine konvexe Teilmenge von* ℓ^∞ *?*
2. *Ist* $B = \{x \in \ell^2; \|x\|_\infty < 1\}$ *eine konvexe Teilmenge von* ℓ^2 *?*

Aufgabe 3.8 *Sei* $v \in \ell^1$. *Man definiert*

$$A_v : \left(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty\right) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

durch $A_v x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n v_k x_k$.

1. *Zeigen Sie, dass* A_v *eine stetige lineare Abbildung ist und berechnen Sie* $\|A_v\|_{\ell^\infty \to \mathbb{R}}$.
2. *Gibt es* $v \in \ell^1$ *mit* $A_v = L$ *aus Aufgabe 3.3?*

Aufgabe 3.9 $\left(L^1(-1,1), \|\cdot\|_1\right)$ *wird definiert in Beispiel 2.12. Zeigen Sie, dass eine stetige lineare Abbildung* $A : \left(L^1(-1,1), \|\cdot\|_1\right) \to \mathbb{R}$ *existiert derart, dass*

- $|A(f)| \le \|f\|_1$ *für alle* $f \in L^1(-1,1)$ *und*
- *für* $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ *mit* $c_i \in \mathbb{R}$ *gilt*
$$A(p) = p'(0) = c_1.$$

Aufgabe 3.10 *Sei $x \in \ell^2$ definiert durch*

$$x_k = \frac{(-1)^k}{k} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+.$$

Setze

$$A_1 = B_{5/4}(x) := \left\{ y \in \ell^2 ; \|x-y\|_2 < \tfrac{5}{4} \right\}$$

und ähnlich $A_2 = B_{5/4}(-x)$. Gibt es eine stetige lineare Funktion $f : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, für die gilt

$$f(a) > 0 \text{ für } a \in A_1 \text{ und } f(a) < 0 \text{ für } a \in A_2?$$

Kapitel 4

Dualraum, Konvergenz und Hilbertraum

4.1 Dualraum

Wenn nichts Anderes geschrieben wird, ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum in Abschnitt 4.1.

Definition 4.1 *Man nennt*

$$V^* := BL\left((V, \|\cdot\|); (\mathbb{R}, |\cdot|)\right)$$

den ***Dualraum*** *von V. Dieser Raum $(V^*, \|\cdot\|_*)$ mit*

$$\|A\|_* = \sup\left\{\frac{|Av|}{\|v\|}; v \in V \setminus \{0\}\right\}$$

ist ein normierter Vektorraum.

Der zweite Teil der Definition ist eigentlich eine Behauptung, die man jedoch direkt zeigen kann.

Weil $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist, folgt aus Theorem 2.10, dass $(V^*, \|\cdot\|_*)$ für jeden normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Beispiel 4.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und betrachte den normierten Vektorraum $\left(L^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}\right)$. Er ist sogar ein Banachraum. Für jede Funktion $v \in L^\infty(\Omega)$ kann man $\phi_v : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definieren durch*

$$\phi_v(f) := \int_\Omega v(x) f(x)\, dx.$$

Man kann zeigen, dass $\phi_v \in L^1(\Omega)^*$.

Gibt es für alle $\phi \in L^1(\Omega)^*$ ein $v \in L^\infty(\Omega)$ derart, dass $\phi = \phi_v$?

Ja, das kann man, aber der Beweis ist nicht einfach. Sie finden ihn bei Steinhaus[1].

Beispiel 4.3 *Für jede Funktion $f \in L^1(\Omega)$ ist auch $\phi_f : L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ wohldefiniert durch*

$$\phi_f(v) := \int_\Omega f(x) v(x)\, dx. \tag{4.1}$$

[1] H. Steinhaus: Additive und stetige Funktionaloperationen, Math. Zeitschrift 5 (1919), 186–221.

Auch hier kann man zeigen, dass $\phi_f \in L^\infty(\Omega)^*$. *Gibt es für alle* $\phi \in L^\infty(\Omega)^*$ *ein* $f \in L^1(\Omega)$ *derart, dass* $\phi = \phi_f$? *Nein. Ein Gegenbeispiel zu zeigen ist jedoch nicht einfach, wenn* Ω *beschränkt ist.*

Beispiel 4.4 *Sei nun* $p \in (1,\infty)$ *und* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. *Für* $f \in L^p(\Omega)$ *ist* $\phi_f \in L^q(\Omega)^*$, *wohldefiniert durch (4.1). Auch gibt es für jedes* $\phi \in L^q(\Omega)^*$ *ein* $f \in L^p(\Omega)$ *derart, dass* $\phi = \phi_f$.

Aufgabe 4.1 *Zeigen Sie für* $v \in L^\infty(\Omega)$ *und* ϕ_v *aus Beispiel 4.2, dass* $\phi_v \in L^1(\Omega)^*$ *gilt.*

Aufgabe 4.2

1. *Zeigen Sie, dass*

$$\phi : \left\{ v \in C(\mathbb{R}) ; \lim_{x\to\infty} v(x) \text{ und } \lim_{x\to-\infty} v(x) \text{ existieren} \right\} \to \mathbb{R}$$

wohldefiniert ist durch

$$\phi(v) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^{M} v(x)\, dx.$$

2. *Zeigen Sie, dass man dieses Funktional zu* $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})^*$ *erweitern kann.*
3. *Kann man für dieses* ϕ *eine Funktion* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *finden derart, dass* $\phi = \phi_f$ *wie in (4.1)?*

Definition 4.5 *Sei* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ *und* $v \in V$. *Wenn für jedes* $A \in V^*$ *gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} Av_n = Av,$$

dann heißt die Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***schwach konvergent*** *nach* v. *Man sagt* v *ist der* ***schwache Limes*** *von* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *und man schreibt*

$$v_n \rightharpoonup v \text{ für } n \to \infty.$$

Lemma 4.6 *Sei* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ *und* $v \in V$.
Wenn $v_n \to v$ *für* $n \to \infty$, *dann* $v_n \rightharpoonup v$ *für* $n \to \infty$.

Das heißt also:

Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

Beweis. Sei $A \in V^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |Av_n - Av| &= \lim_{n\to\infty} |A(v_n - v)| \\ &\le \lim_{n\to\infty} \|A\|_* \|v_n - v\| \\ &\le \|A\|_* \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0\end{aligned}$$

und $\lim_{n\to\infty} Av_n = Av$. ■

Schwache Konvergenz ist auch wirklich schwächer als normale Konvergenz, die man dann auch oft als starke Konvergenz beschreibt. Ein Beispiel dazu sehen wir später.

Ähnlich mit starkem Limes ist, dass eine Folge auch nur höchstens einen schwachen Limes haben kann:

Lemma 4.7 *Sei* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ *und* $v, w \in V$. *Wenn* $v_n \rightharpoonup v$ *und* $v_n \rightharpoonup w$, *dann gilt* $v = w$.

Beweis. Sei $v \neq w$. In Korollar 3.11 findet man, dass es ein stetiges lineares Funktional $\phi \in V^*$ gibt, mit

$$\phi(v) \neq \phi(w).$$

Wenn $v_n \rightharpoonup v$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \phi(v_n) = \phi(v)$ und ähnlich gilt $\lim_{n\to\infty} \phi(v_n) = \phi(w)$, ein Widerspruch. ∎

. . . .

Aufgabe 4.3 *Wir betrachten* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *mit* $\|\cdot\|$ *der euklidischen Norm.*

1. *Beschreiben Sie alle Elemente in* $(\mathbb{R}^n)^*$.
2. *Geben Sie eine Norm an für* $(\mathbb{R}^n)^*$.

4.2 Doppelt dual

Wenn man schon für einen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ den normierten Dualraum $(V^*, \|\cdot\|_*)$ definiert, dann kann man ja auch den doppelt Dualen $(V^{**}, \|\cdot\|_{**})$ definieren. Dabei kann man direkt für jedes $v \in V$ einen Operator $F_v \in V^{**}$ finden, nämlich durch

$$F_v(\phi) = \phi(v) \text{ für } \phi \in V^*. \tag{4.2}$$

Für $v = 0$ folgt $F_v(\phi) = 0$ für alle $\phi \in V^*$ und die triviale Abbildung liegt in V^{**}. Es gilt $|\phi(v)| \leq \|\phi\|_* \|v\|$ und

$$\begin{aligned} \|F_v\|_{**} &= \sup\left\{\frac{|F_v(\phi)|}{\|\phi\|_*}; 0 \neq \phi \in V^*\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\phi(v)|}{\|\phi\|_*}; 0 \neq \phi \in V^*\right\} \leq \|v\|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Lemma 4.8 *Sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter Vektorraum. Sei* $v \in V$ *und* $F_v \in V^{**}$ *definiert durch (4.2). Dann gilt*

$$\|F_v\|_{**} = \|v\|.$$

Beweis. Für $v = 0$ folgt die Aussage direkt. Nehmen wir an, $\|v\| \neq 0$. Die Abschätzung nach oben findet man in (4.3). Für die Abschätzung in der anderen Richtung definiert man $f_v : \operatorname{Span}(v) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_v(tv) = t\|v\| \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Mit Hahn-Banach kann man diese lineare Funktion mit Norm 1 erweitern zu $\phi_v \in V^*$ mit gleicher Norm und dies zeigt, dass das Supremum in (4.3) angenommen wird für $\phi = \phi_v$. ∎

Weil $(V^{**}, \|\cdot\|_{**})$ immer ein Banachraum ist, auch wenn $(V, \|\cdot\|)$ das nicht ist, weiß man, dass V^{**} im Allgemeinen echt größer als V ist. Anders gesagt, wenn $(V, \|\cdot\|)$ kein Banachraum ist, dann gibt es $F \in V^{**}$, die man nicht als F_v für $v \in V$ schreiben kann.

Definition 4.9 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Wenn für jedes $F \in V^{**}$ ein $v \in V$ existiert derart, dass*

$$F_v(\phi) = \phi(v) \text{ für } \phi \in V^*,$$

dann heißt $(V, \|\cdot\|)$ ***reflexiv****.*

Beispiel 4.10
- *Für $p \in (1, \infty)$ ist $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ reflexiv.*
- *$(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ und $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sind nicht reflexiv.*
- *$\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\right)$, für $p \in (1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, ist reflexiv.*
- *$\left(L^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}\right)$ und $\left(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$ sind nicht reflexiv.*

Wenn der normierte Vektorraum nicht reflexiv ist, ist die folgende Konvergenz interessant:

Definition 4.11 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^*$ und $\phi \in V^*$. Wenn für jedes $v \in V$ gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(v) = \phi(v),$$

dann heißt die Folge ***schwach-$*$ konvergent*** *in V^* nach ϕ. Man schreibt*

$$\phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \text{ für } n \to \infty.$$

Schwach-konvergent für eine Folge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^*$ bedeutet, dass

$$\lim_{n\to\infty} F(\phi_n) = F(\phi) \text{ für alle } F \in V^{**}.$$

Wenn eine Folge schwach-$*$ konvergent ist, dann bedeutet das für F_v in (4.2), dass

$$\lim_{n\to\infty} F_v(\phi_n) = F_v(\phi) \text{ für alle } v \in V.$$

Also gilt für $\phi_n, \phi \in V^*$, dass

$$\phi_n \to \phi \quad \Longrightarrow \quad \phi_n \rightharpoonup \phi \quad \Longrightarrow \quad \phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \phi.$$

Wenn $(V, \|\cdot\|)$ nicht reflexiv ist, dann ist schwach-$*$ konvergent schwächer als schwach konvergent.

Theorem 4.12 (Banach-Alaoglu) *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein separabler normierter Vektorraum. Dann hat jede beschränkte Folge von Funktionalen $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^*$ eine schwach-$*$ konvergente Teilfolge.*

Beweis. Beschränkt heißt hier, dass $c \in \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$\|\phi_n\|_* \le c \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Separabel bedeutet, dass es eine abzählbare dichte Teilmenge $S = \{v_m\}_{m\in\mathbb{N}^+} \subset V$ gibt.

• Wir werden Teilfolge $\{\phi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ finden mit $\phi_{n_k}(v_m)$ konvergent für alle $v_m \in S$ durch ein sogenanntes Diagonalverfahren.

Weil $\{\phi_n(v_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist in $\mathbb{R}$, gibt es eine konvergente Teilfolge und $\phi_{n_{1,k}}(v_1) \to c_1 =: \phi(v_1)$ für $k \to \infty$. Diese Teilfolge hat wiederum ein Teilfolge mit $\phi_{n_{2,k}}(v_2) \to c_2 =:$

$\phi(v_2)$ für $k \to \infty$. Und so weiter. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}^+$, dass

$$\phi_{n_{k,k}}(v_m) \to \phi(v_m) \text{ für } k \to \infty \tag{4.4}$$

und ϕ ist wohldefiniert auf der dichten Teilmenge S von V. Dann liefert $\phi_{n_k} := \phi_{n_{k,k}}$ die gewünschte Teilfolge.

• Wenn $v_m, v_\ell \in S$, dann folgt

$$\begin{aligned} |\phi(v_m) - \phi(v_\ell)| &= \lim_{k\to\infty} \left|\phi_{n_{k,k}}(v_m) - \phi_{n_{k,k}}(v_\ell)\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left|\phi_{n_{k,k}}(v_m - v_\ell)\right| \leq c\,\|v_m - v_\ell\|. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dies bedeutet, dass ϕ Lipschitz-stetig ist mit Konstante c auf S.

• Weil S dicht in V liegt, gibt es für jedes $v \in V$ eine Folge $\{v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $S \ni v_{m_k} \to v$ für $k \to \infty$. Man definiert

$$\phi(v) := \lim_{k\to\infty} \phi(v_{m_k}) \tag{4.6}$$

und wegen (4.5) ist die Erweiterung von ϕ auf V nicht abhängig von der gewählten Folge. Deshalb ist ϕ durch (4.6) wohldefiniert und außerdem, wenn $v_{m_k} \to v$ und $v_{n_k} \to w$ für $k \to \infty$, dann folgt

$$\begin{aligned} |\phi(v) - \phi(w)| &= \lim_{k\to\infty} |\phi(v_{m_k}) - \phi(v_{n_k})| \\ &\leq \lim_{k\to\infty} c\,\|v_{m_k} - v_{n_k}\| = c\,\|v - w\|. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dies bedeutet, dass $\phi : V \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist mit Konstante c.

• Die Linearität von ϕ zeigt man durch Approximation mit $\phi_{n_{k,k}}$ für k genügend groß: Sei $v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3} \in S$ mit

$$\|v - v_{k_1}\|, \|w - v_{k_2}\|, \|(\alpha v + \beta w) - v_{k_3}\| < \varepsilon.$$

Man bekommt die folgenden Abschätzungen: Mit (4.7) folgt:

$$\begin{aligned} &|\phi(\alpha v + \beta w) - \alpha\phi(v) - \beta\phi(w)| \leq \\ &|\phi(v_{k_3}) - \alpha\phi(v_{k_1}) - \beta\phi(v_{k_2})| + (1 + |\alpha| + |\beta|)\,c\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Mit (4.4) folgt für k genügend groß, dass für $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\left|\phi(v_{k_i}) - \phi_{n_{k,k}}(v_{k_i})\right| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Die Linearität von $\phi_{n_{k,k}}$ zeigt

$$\begin{aligned} &\left|\phi_{n_{k,k}}(v_{k_3}) - \alpha\phi_{n_{k,k}}(v_{k_1}) - \beta\phi_{n_{k,k}}(v_{k_2})\right| \\ &= \left|\phi_{n_{k,k}}(v_{k_3} - \alpha v_{k_1} - \beta v_{k_2})\right| \\ &\leq c\,\|v_{k_3} - \alpha v_{k_1} - \beta v_{k_2}\| \leq c\,(1 + |\alpha| + |\beta|)\,\varepsilon \end{aligned} \tag{4.10}$$

Kombiniert man (4.8), (4.9) und (4.10), so folgt

$$|\phi(\alpha v + \beta w) - \alpha\phi(v) - \beta\phi(w)| < (1 + |\alpha| + |\beta|)(2c + 1)\,\varepsilon$$

und weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, die Linearität. Aus (4.7) folgt dann, dass $\|\phi\|_* \leq c$.

• Wir müssen noch zeigen, dass $\phi_{n_{k,k}} \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$. Für $v_n \in S$ gilt dies wegen der Konstruktion. Für $v \in V \setminus S$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $v_n \in S$ mit $\|v - v_n\| < \varepsilon$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \left|\phi_{n_{k,k}}(v) - \phi(v)\right| &\leq \left|\phi_{n_{k,k}}(v) - \phi_{n_{k,k}}(v_n)\right| + \\ &\quad + \left|\phi_{n_{k,k}}(v_n) - \phi(v_n)\right| + |\phi(v_n) - \phi(v)| \\ &\leq \left|\phi_{n_{k,k}}(v_n) - \phi(v_n)\right| + 2c\varepsilon. \end{aligned}$$

Weil $\left|\phi_{n_{k,k}}(v_n)-\phi(v_n)\right|\to 0$ für $k\to\infty$ gilt, folgt

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\phi_{n_{k,k}}(v)-\phi(v)\right|\leq 2c\varepsilon$$

und weil dies für jedes $\varepsilon>0$ gilt, findet man

$$\phi_{n_{k,k}}\overset{*}{\rightharpoonup}\phi \text{ für } k\to\infty,$$

und das war noch zu beweisen. ■

Definition 4.13 *Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein Banachraum. Die Teilmenge $A\subset V$ heißt* ***schwach folgenkompakt****, wenn jede Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset A$ eine in A schwach-konvergente Teilfolge hat: Es gibt $v\in A$ und $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\lim_{k\to\infty}\phi(v_{n_k})=\phi(v)\ \text{ für alle } \phi\in V^*.$$

Wir haben Span definiert für endlich viele Vektoren, brauchen jedoch auch eine Definition für abzählbar viele Elemente.

Definition 4.14 *Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und S eine endliche oder unendliche Menge in V. Man definiert*

$$\operatorname{Span}(S)=\left\{\sum_{k=1}^{n}c_k s_k; c_k\in\mathbb{R},\ s_k\in S \text{ und } n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Wenn $(V,\|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, nennt man $\overline{\operatorname{Span}(S)}$ den durch S ***generierten Teilraum*** *von V.*

Auch wenn S unendlich viele Elemente hat, ist die lineare Hülle $\operatorname{Span}(S)$ die Menge der endlichen linearen Kombinationen von Elementen aus S, während $\overline{\operatorname{Span}(S)}$ der Abschluss von $\operatorname{Span}(S)$ ist:

$$\overline{U}=\left\{f\in V;\exists\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset U \text{ mit } \lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0\right\}.$$

Proposition 4.15 *Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Wenn $(V^*,\|\cdot\|_*)$ separabel ist, dann ist $(V,\|\cdot\|)$ separabel.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine abzählbare dichte Teilmenge in V^*. Dann liegt

$$\mathcal{F}_1:=\{f/\|f\|_*\,;\ f\in\mathcal{F}\setminus\{0\}\}$$

dicht in $\{g\in V^*;\|g\|_*=1\}$ und ist auch abzählbar, sagen wir

$$\mathcal{F}_1=\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Weil $\|f_k\|_*=1$ findet man $v_k\in V$ mit $\|v_k\|=1$ und

$$f_k(v_k)>\tfrac{1}{2}.$$

Dann ist $V_0:=\overline{\operatorname{Span}\left(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right)}$ ein separabler Teilraum von V. Für die Separabilität nehme man die Kombinationen in $\operatorname{Span}\left(\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right)$ mit rationalen Koeffizienten.

Wir zeigen, dass $V=V_0$: Wenn $V\neq V_0$, dann gibt es $\tilde{v}\in V\setminus V_0$. Für

$$V_1=\{v_0+t\tilde{v}; v_0\in V_0 \text{ und } t\in\mathbb{R}\}$$

definiert man $g(v_0+t\tilde{v})=t\|\tilde{v}\|$. Dies ist ein beschränktes lineares Funktional auf V_1 mit Norm 1, das man mit Theorem 3.10 erweitern kann zu $\tilde{g}\in V^*$ mit $\|\tilde{g}\|_*=1$.

Dieses $\tilde{g}$ kann man wiederum approximieren mit Elementen f_{k_n} aus $\mathcal{F}_1$. Dann folgt mit v_{k_n} wie oben, dass

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}<f_{k_n}(v_{k_n})=f_{k_n}(v_{k_n})-\tilde{g}(v_{k_n})&\leq|f_{k_n}(v_{k_n})-\tilde{g}(v_{k_n})|\\&\leq\|f_{k_n}-\tilde{g}\|_*\|v_{k_n}\|=\|f_{k_n}-\tilde{g}\|_*\to 0,\end{aligned}$$

ein Widerspruch. ■

Als Korollar von Banach-Alaoglu und der letzten Proposition finden wir das nächste Ergebnis:

Korollar 4.16 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein reflexiver, separabler Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in V schwach kompakt.*

Aufgabe 4.4 *Beweisen Sie dieses Korollar.*

4.3 Hilbertraum

Wenn $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist, dann hat die Norm $\|\cdot\|$, definiert durch
$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$
eine Eigenschaft, die man auch das Parallelogrammgesetz nennt:

$$„\sum_4 \text{Seitenlängen}^2 = \sum_2 \text{Diagonallängen}^2\text{“}.$$

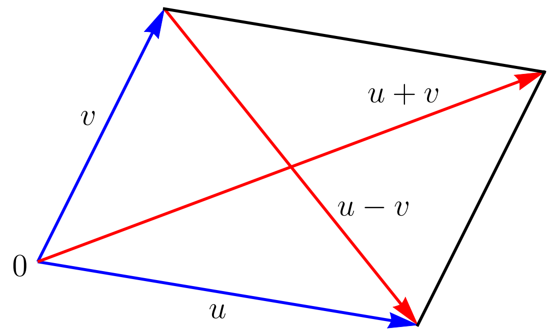


Abbildung 4.1: Illustration zum Parallelogrammgesetz

Lemma 4.17 (Parallelogrammgesetz) *Sei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm für den Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so gilt*

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \text{ für alle } u, v \in H.$$

Als nächstes werden wir einige Teilräume anschauen.

Lemma 4.18 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und S eine endliche oder unendliche Menge in H. Dann ist*

$$S^\perp := \{v \in H; \langle v, s\rangle = 0 \text{ für alle } s \in S\}$$

ein abgeschlossener Teilraum von H.
Man nennt $S^\perp$ den ***Orthogonalraum*** *zu S.*

Beweis. Dass $S^{\perp}$ ein Teilraum von H ist, folgt aus

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, s\rangle = \alpha \langle v_1, s\rangle + \beta \langle v_2, s\rangle$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in V$. Dieser Raum ist sogar abgeschlossen: Wenn $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ und $v_n \in S^{\perp}$, dann gilt wegen Cauchy-Schwarz für $s \in S$, weil $\langle v_n, s\rangle = 0$, dass

$$|\langle v, s\rangle| = |\langle v - v_n, s\rangle| \leq \|v - v_n\| \, \|s\| \to 0,$$

für $n \to \infty$, also $\langle v, s\rangle = 0$. ■

Wenn V ein Teilraum von H ist, dann gilt

$$V \cap V^{\perp} = \{0\},$$

denn $v \in V \cap V^{\perp}$ bedeutet $\langle v, v\rangle = 0$. Auch gilt

$$V \subset V^{\perp\perp}$$

mit Gleichheit im Fall, dass V ein abgeschlossener Teilraum ist.

Genaueres über Teilraum und dessen Orthogonalraum finden Sie im nächsten technischen Theorem.

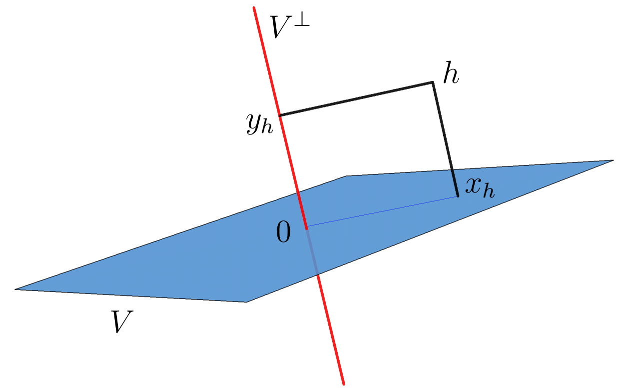
Theorem 4.19 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und V ein abgeschlossener Teilraum in H. Dann gilt folgendes:*

1. *$H = V \oplus V^{\perp}$, bei dem $\oplus$ bedeutet: für jedes $h \in H$ existiert genau ein Paar $(x_h, y_h) \in V \times V^{\perp}$ mit $h = x_h + y_h$*

2. *und für die so wohl-definierten Abbildungen*

$$P_V : H \to V \text{ mit } P_V(h) = x_h,$$
$$P_{V^{\perp}} : H \to V^{\perp} \text{ mit } P_{V^{\perp}}(h) = y_h,$$

hat man:



(a) $P_V, P_{V^{\perp}}$ sind linear und stetig mit

$$\|P_V\|_{H\to H}, \|P_{V^{\perp}}\|_{H\to H} \leq 1;$$

(b) $\|h - P_V(h)\| = \inf_{x\in V} \|h - x\|$ und
$$\|h - P_{V^{\perp}}(h)\| = \inf_{y\in V^{\perp}} \|h - y\|.$$

NB: P_V nennt man die ***orthogonale Projektion*** *auf V.*

Beweis. Wir fangen hinten an. Sei $h \in H$ und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$ eine Folge mit

$$\|h - x_n\| \to \inf_{x\in V} \|h - x\| =: d.$$

Wegen Lemma 4.17 gilt

$$\begin{aligned} & \|x_n - x_m\|^2 = \|(h - x_n) - (h - x_m)\|^2 \\ = \; & 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - \|2h - x_n - x_m\|^2 \\ = \; & 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - 4\left\|h - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \\ \leq \; & 2\|h - x_n\|^2 + 2\|h - x_m\|^2 - 4d^2 \to 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dann ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und weil H ein Hilbertraum ist, ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sogar auch konvergent und konvergiert zu einem $x_\infty \in V$, weil V abgeschlossen ist.

Seien nun $x_\triangle$ und $x_\triangledown$ zwei solche Minimalstellen, dann gilt ähnlich wie in (4.11), dass

$$\|x_\triangle - x_\triangledown\|^2 \leq 2\|h - x_\triangle\|^2 + 2\|h - x_\triangledown\|^2 - 4d^2 = 0$$

und es folgt $x_\triangle = x_\triangledown$. Also gibt es ein eindeutiges $x_\infty \in V$ mit

$$\|h - x_\infty\| = \inf_{x\in V} \|h - x\|$$

und wir definieren

$$P_V(h) := x_\infty. \tag{4.12}$$

- Es gilt, dass $h - P_V(h) \in V^\perp$, denn wenn es $v \in V$ gibt mit $\langle h - P_V(h), v\rangle \neq 0$, dann folgt mit

$$t = \frac{\langle h - P_V(h), v\rangle}{\|v\|^2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ein Widerspruch:

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|h - P_V(h) - tv\|^2 \\ &= \|h - P_V(h)\|^2 - 2t\langle h - P_V(h), v\rangle + t^2\|v\|^2 \\ &= \|h - P_V(h)\|^2 - t^2\|v\|^2 < d^2. \end{aligned}$$

- Außerdem ist $P_V(h)$ das einzige Element von V mit

$$h - P_V(h) \in V^\perp.$$

Wenn auch $v \in V$ diese Eigenschaft hat, dann gilt

$$V \ni P_V(h) - v = (h - v) - (h - P_V(h)) \in V^\perp$$

und weil $V \cap V^\perp = \{0\}$, folgt $P_V(h) = v$.

Für jedes $h \in H$ gibt es also ein eindeutiges Paar $(x, y) \in V \times V^\perp$ mit $h = x + y$, nämlich

$$x = P_V(h) \text{ und } y = h - P_V(h).$$

Das zeigt $H = V \oplus V^\perp$.

- P_V ist linear: Sei $h = c_1h_1 + c_2h_2$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ und $h_i \in H$. Weil

$$c_1P_V(h_1) + c_2P_V(h_2) \in V$$

und

$$\begin{aligned} & h - (c_1P_V(h_1) + c_2P_V(h_2)) \\ = \;& c_1(h_1 - P_V(h_1)) + c_2(h_2 - P_V(h_2)) \in V^\perp, \end{aligned}$$

und weil die Zerlegung eindeutig ist, folgt

$$P_V(h) = c_1P_V(h_1) + c_2P_V(h_2).$$

- $\|P_V\|_{H\to H} \leq 1$: Für $h \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \|h - P_V(h) + P_V(h)\|^2 \\ &= \|h - P_V(h)\|^2 + 2\langle h - P_V(h), P_V(h)\rangle + \|P_V(h)\|^2 \\ &= \|h - P_V(h)\|^2 + \|P_V(h)\|^2 \end{aligned}$$

und $\|P_V(h)\|^2 \leq \|h\|^2$. Dies zeigt übrigens auch, dass für

$$P_{V^\perp} := I - P_V$$

gilt $\|P_{V^\perp}\| \leq 1$.

- Schlussendlich zeigen wir noch, dass

$$\inf_{v\in V^{\perp}} \|h-v\| = \|h-P_{V^{\perp}}(h)\|. \tag{4.13}$$

Weil $P_{V^{\perp}}(h) \in V^{\perp}$, folgt

$$\inf_{v\in V^{\perp}} \|h-v\| \leq \|h-P_{V^{\perp}}(h)\|. \tag{4.14}$$

Außerdem folgt für alle $v \in V^{\perp}$, dass

$$w := h - P_V(h) - v \in V^{\perp}.$$

So findet man, weil $P_V(h) \in V$, dass $\langle w, P_V(h)\rangle = 0$ und

$$\begin{aligned} \|h-v\|^2 &= \|w+P_V(h)\|^2 \\ &= \|w\|^2 + 2\langle w, P_V(h)\rangle + \|P_V(h)\|^2 \\ &= \|w\|^2 + \|P_V(h)\|^2 \geq \|P_V(h)\|^2 \\ &= \|h-P_{V^{\perp}}(h)\|^2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Aus (4.14) und (4.15) folgt (4.13). ■

Wenn $V = \operatorname{Span}(a)$ für $\|a\| = 1$, dann gilt

$$P_V(h) = \langle a,h\rangle a \text{ und } V^{\perp} = \{h \in H; \langle a,h\rangle = 0\}.$$

Die Zerlegung ist eindeutig und es gilt $\langle a,h\rangle a \in \operatorname{Span}(a) = V$ und $h - \langle a,h\rangle a \in V^{\perp}$:

$$\langle h - \langle a,h\rangle a, a\rangle = \langle h,a\rangle - \langle a,h\rangle \|a\|^2 = 0.$$

....

Aufgabe 4.5 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und seien $a, b \in H$ zwei unabhängige Elemente. Wir setzen $V = \operatorname{Span}(a,b)$. Geben Sie eine Formel für $P_V(h)$.*

Theorem 4.20 (Der Darstellungssatz von Riesz für Hilberträume) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Dann gilt:*

1. *Für alle $v \in H$ ist $u \mapsto \langle v,u\rangle : H \to \mathbb{R}$ ein Element von H^*.*
2. *Für jedes $\phi \in H^*$ gibt es $v \in H$ mit $\phi(u) = \langle v,u\rangle$ für alle $u \in H$.*

Dieses Theorem besagt, dass man H und H^* identifizieren kann. In den nächsten Kapiteln werden wir das auch machen und statt H^* nur noch H schreiben.

Beweis. 1. Aus den Eigenschaften vom inneren Produkt folgt, dass ϕ_v, definiert durch $\phi_v(u) = \langle v,u\rangle$, linear ist. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz zeigt die Beschränktheit:

$$|\phi_v(u)| = |\langle v,u\rangle| \leq \|v\|\,\|u\| \text{ für alle } u \in H.$$

Also gilt $\phi_v \in H^*$.

2. Sei $\phi \in H^*$ und definiere $V := \operatorname{Ker}(\phi)$. Weil $\phi \in H^*$ gilt, ist $\operatorname{Ker}(\phi)$ ein abgeschlossener Teilraum von H. Für $\phi = 0$ finden wir $\phi(u) = \langle 0,u\rangle$. Für $\phi \neq 0$ gilt $V \neq H$ und es gibt $a \in V^{\perp}$ mit $\phi(a) \neq 0$. Wir dürfen annehmen, dass $\|a\| = 1$.

Es gilt $\operatorname{Span}(a) \subset V^{\perp}$ und wir zeigen, dass sogar

$$\operatorname{Span}(a) = V^{\perp}. \tag{4.16}$$

Wenn es ein unabhängiges $b \in V^{\perp}$ gäbe, dann würde gelten, dass

$$\phi(\phi(a)\, b - \phi(b)\, a) = 0,$$

und

$$V^{\perp} \ni \phi(a)\, b - \phi(b)\, a \in \operatorname{Ker}(\phi) = V.$$

Weil $V \cap V^{\perp} = \{0\}$, folgt $\phi(a)\, b = \phi(b)\, a$ und weil $\phi(a) \neq 0$ findet man, dass a, b abhängig sind, ein Widerspruch.

Also gilt (4.16) und aus Theorem 4.19 folgt dann, dass

$$H = \operatorname{Span}(a) \oplus \operatorname{Ker}(\phi)$$

und weil

$$P_{\operatorname{Span}(a)}(h) = \langle a, h\rangle\, a$$

folgt

$$\begin{aligned}\phi(h) &= \phi\left(P_{\operatorname{Span}(a)}(h)\right) + \phi\left(P_{\operatorname{Ker}(\phi)}(h)\right)\\ &= \phi(\langle a, h\rangle\, a) = \langle a, h\rangle\, \phi(a) = \langle \phi(a)\, a, h\rangle\,.\end{aligned}$$

Setzen wir $v = \phi(a)\, a$, so folgt $\phi(h) = \langle v, h\rangle$. ■

Aufgabe 4.6 *Im obigen Beweis steht der Satz: „Weil $\phi \in H^*$ gilt, ist $\operatorname{Ker}(\phi)$ ein abgeschlossener Teilraum von H“. Zeigen Sie dies.*

Beispiel 4.21 *Für den Hilbertraum $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kann man nun zeigen, dass schwache Konvergenz tatsächlich schwächer ist als starke Konvergenz. Betrachte nämlich die Folge $\left\{x^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2$ definiert durch*

$$x_k^{(n)} = \delta_{nk} := \begin{cases} 1 & \text{für } n = k. \\ 0 & \text{für } n \neq k. \end{cases}$$

Dieses δ_{nk} nennt man Kronecker Delta.
Man findet $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0$ und das bedeutet, dass $0 \in \ell^2$ als einziger Limes in Frage kommt. Weil jedoch $\left\|x^{(n)} - 0\right\|_2 = 1$ gilt, konvergiert die Folge nicht. Sei $\phi \in H^*$, dann gilt wegen Riesz, dass $v \in H$ existiert mit $\phi(u) = \langle v, u\rangle$ für alle $u \in H$. Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle v, x^{(n)}\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_k \delta_{nk} = \lim_{n\to\infty} v_n = 0.$$

Also gilt $x^{(n)} \rightharpoonup 0$ für $n \to \infty$.

. . . .

Aufgabe 4.7 *Wir betrachten den Hilbertraum* $\left(L^2(0,\pi), \|\cdot\|_2\right)$. $L^2(0,\pi)$ *ist die Menge aller quadratisch integrierbaren Funktionen* $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ *und*

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^\pi f(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Geben Sie eine Folge an, die schwach konvergiert und nicht stark, und zeigen Sie dies.

Aufgabe 4.8 *Begründen Sie, dass jedes* $\phi \in (\ell^2)^*$ *wie folgt zu schreiben ist:*

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k x_k. \tag{4.17}$$

Welche Bedingung erfüllt $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$*?*

Aufgabe 4.9 *Sei* $p,q\in(1,\infty)$ *mit* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung für Reihen: Für* $\alpha\in\ell^p, \beta\in\ell^q$ *gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\beta_k \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^q\right)^{1/q}.$$

Aufgabe 4.10 *Sei* $p,q\in(1,\infty)$ *mit* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. *Zeigen Sie, dass mit* $v\in\ell^q$ *für die Abbildung* $\phi_v=\phi$, *definiert durch (4.17), gilt, dass* $\phi_v\in(\ell^p)^*$ *und, dass* $\|\phi_v\|_{(\ell^p)^*}\le\|v\|_{\ell^q}$.

2. *Zeigen Sie* $\|\phi_v\|_{(\ell^p)^*}=\|v\|_{\ell^q}$ *mit Hilfe von* $\phi_v(\tilde v)$ *für*
$$\tilde v_k = \begin{cases} v_k^{q/p} & \text{wenn } v_k\ge 0,\\ -|v_k|^{q/p} & \text{wenn } v_k<0.\end{cases}$$

3. *Für* $p\in(1,\infty)$ *ist* $\left(\ell^p,\|\cdot\|_p\right)$ *reflexiv. Zeigen Sie, dass es für jede Abbildung* $\phi\in(\ell^p)^*$ *ein* $v\in\ell^q$ *gibt mit* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *und* ϕ *als in (4.17).*

4. *Gibt es auch für* $(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$, *dass für jedes* $\phi\in(\ell^\infty)^*$ *ein* $v\in\ell^1$ *existiert derart, dass*
$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k x_k?$$

Schauen Sie Aufgaben 3.3 und 3.8 nochmals an.

Kapitel 5

Gram-Schmidt und Lax-Milgram

5.1 Orthogonalisierung

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein separabler Hilbertraum. Dann existiert also eine abzählbare dichte Teilmenge $S = \{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Kann man eine Schauderbasis für V finden? Der erste Schritt wäre dann dafür zu sorgen, dass man eine unabhängige Teilmenge von S nehmen würde. Das bekommt man hin, indem man für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge S_k mit $S_0 = \{v_0\}$ betrachtet und dann iterativ wie folgt vorgeht:

1. Wenn S_k unabhängig ist, dann betrachtet man als nächstes $S_{k+1} = S_k \cup \{v_{k+1}\}$.

2. Wenn S_k abhängig ist, dann betrachtet man als nächstes $S_{k+1} = (S_k \setminus \{v_k\}) \cup \{v_{k+1}\}$.

Dann ist $\tilde{S} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (S_k \setminus \{v_k\})$ abzählbar und derart, dass jede endliche Teilmenge unabhängig ist und außerdem gilt, dass

$$\overline{\operatorname{Span}(\tilde{S})} = \overline{\operatorname{Span}(S)} = \overline{S} = V.$$

Man könnte jetzt vielleicht $\tilde{S}$ eine Basis für V nennen, denn man kann jedes Element in V durch endliche Linearkombinationen von Elementen aus $\tilde{S}$ approximieren. Das reicht jedoch nicht, um $\tilde{S}$ eine Schauderbasis zu nennen. Dazu dient das folgende:

Algorithmus 5.1 (Gram-Schmidt) *Sei S eine endliche oder abzählbar unendliche, linear unabhängige Teilmenge vom Hilbertraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Also $S = \{v_k\}_{k=1}^n$ oder $S = \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$.*

1. *Setze $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$.*

Weiter geht es iterativ nach $k \geq 1$:

2. *Wenn $\{e_1, \dots e_k\}$ bekannt ist, dann setze*

$$e_{k+1} = \frac{v_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle e_j, v_{k+1}\rangle\, e_j}{\left\| v_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle e_j, v_{k+1}\rangle\, e_j \right\|}.$$

Das Ergebnis für $E := \{e_k\}_{k=1}^n$ oder $E := \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ ist folgendes:

1. $\operatorname{Span}(E) = \operatorname{Span}(S)$;
2. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ für $e_i, e_j \in E$ mit δ_{ij} dem Kronecker Delta-Symbol.
3. Für jedes $v \in \operatorname{Span}(S)$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$v = \sum_{j=1}^{k} \langle e_j, v \rangle \, e_j.$$

. . . .

Aufgabe 5.1 *Zeigen Sie diesen dritten Punkt.*

Definition 5.2 *Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $E \subset V$. Man nennt die Menge $E := \{e_1, \dots, e_n\}$ oder $E := \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$* ***orthonormal****, wenn sie derart ist, dass*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \text{ für alle } e_i, e_j \in E.$$

. . . .

Aufgabe 5.2 *Zeigen Sie, dass eine orthogonale Menge unabhängig ist.*

Lemma 5.3 *Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und sei $S \subset H$. Dann ist folgendes äquivalent:*

1. $\operatorname{Span}(S)$ *liegt dicht in H;*
2. $S^\perp = \{0\}$.

Beweis. Wegen der Linearität vom inneren Produkt folgt

$$S^\perp = (\operatorname{Span}(S))^\perp$$

und mit Cauchy-Schwarz, dass

$$(\operatorname{Span}(S))^\perp = \overline{\operatorname{Span}(S)}^\perp.$$

Mit Theorem 4.19 findet man dann

$$H = \overline{\operatorname{Span}(S)} \oplus S^\perp. \tag{5.1}$$

Wenn $\operatorname{Span}(S)$ dicht liegt in H, dann folgt $\overline{\operatorname{Span}(S)} = H$ und $S^\perp = \{0\}$.

Wenn $S^\perp = \{0\}$ gilt, dann folgt mit der gleichen Formel (5.1), dass $\overline{\operatorname{Span}(S)} = H$. ■

Theorem 5.4 (Die Ungleichung von Bessel) *$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein Hilbertraum und $S = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ ist eine orthonormale Teilmenge von H. Wir setzen $V := \overline{\operatorname{Span}(S)}$ und P_V ist die orthogonale Projektion auf V wie in Th. 4.19. Dann gilt für alle $h \in H$, dass*

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, h\rangle|^2 = \|P_V h\|^2 \le \|h\|^2 ,$$

und

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \langle e_k, h\rangle\, e_k = P_V h.$$

Mit den offensichtlichen Änderungen gilt dieses Theorem auch, wenn $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ endlich ist.

Beweis. Definiere $V_n = \operatorname{Span}(\{e_1,\dots,e_n\})$ für $n \in \mathbb{N}^+$. Dann findet man für $h \in H$, dass

$$P_{V_n}(h) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \langle e_k, h\rangle\, e_k$$

und wegen der Orthogonalität:

$$\|P_{V_n}(h)\|^2 = \sum\nolimits_{k=1}^{n} |\langle e_k, h\rangle|^2$$

Theorem 4.19 sagt, dass $\|P_{V_n}(h)\| \le \|h\|$ für jedes n, also gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, h\rangle|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, h\rangle|^2 \le \|h\|^2 \tag{5.2}$$

Für $h \in H$ ist die Folge $\{P_{V_n}(h)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ Cauchy, denn, nehmen wir $m > n$, so gilt

$$\begin{aligned}\|P_{V_n}(h) - P_{V_m}(h)\|^2 &= \left\|\sum\nolimits_{k=n+1}^{m} \langle e_k, h\rangle\, e_k\right\|^2 \\ &= \sum\nolimits_{k=n+1}^{m} |\langle e_k, h\rangle|^2 \to 0 \text{ für } n, m \ge M \to \infty\end{aligned}$$

wegen (5.2). Weil H vollständig ist, gibt es $v_\infty \in H$ mit

$$v_\infty = \lim_{n\to\infty} P_{V_n}(h) .$$

Weil $P_{V_n}(h) \in V_n \subset V$ und V abgeschlossen ist, folgt $v_\infty \in V$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $v_\infty = P_V(h)$. Auch $P_V(h) \in V = \overline{\operatorname{Span}(S)}$. Es gibt also $w_n \in V_n$ derart, dass $w_n \to P_V(h)$, und dann folgt auch, weil $V_n \subset V$ impliziert $P_{V_n}(P_V(h)) = P_{V_n}(h)$, dass

$$\begin{aligned}\|w_n - P_{V_n}(h)\| &= \|P_{V_n} w_n - P_{V_n}(P_V(h))\| \\ &= \|P_{V_n}(w_n - P_V(h))\| \\ &\le \|w_n - P_V(h)\| \to 0 \text{ für } n \to \infty\end{aligned} \tag{5.3}$$

Weil $P_{V_n}(h) \to v_\infty$ und $w_n \to P_V(v)$, folgt mit (5.3), dass $v_\infty = P_V(h)$. ■

Korollar 5.5 (Identität von Parseval)
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und sei $S = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ eine orthonormale Teilmenge von H mit $H = \overline{\operatorname{Span}(S)}$. Dann ist S eine Schauderbasis und

$$\|v\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}^+} |\langle e_k, v\rangle|^2 .$$

Bemerkung 5.5.1 *In dem Fall findet man auch, dass*

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, v \rangle e_k \quad \text{für alle } v \in H.$$

Definition 5.6 *Sei* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein Hilbertraum und*

$$S := \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^+} \subset H.$$

Wenn S *orthonormal ist und* $H = \overline{\mathrm{Span}\,(S)}$, *dann nennt man* S *ein* ***vollständiges Orthonormalsystem****.*

. . . .

Beispiel 5.7 *Wir betrachten* $L^2(0,\pi)$, *die Menge der Funktionen* $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\|f\|_{L^2(0,\pi)} := \left(\int_0^\pi f(x)^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty.$$

$(L^2(0,\pi), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *mit* $\langle u, v \rangle := \int_0^\pi u(x) v(x) \, dx$ *ist ein Hilbertraum.*

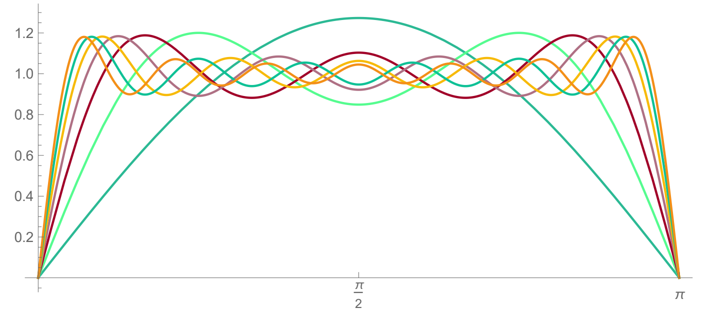
Sei $S = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ *mit*

$$e_k(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \sin(kx).$$

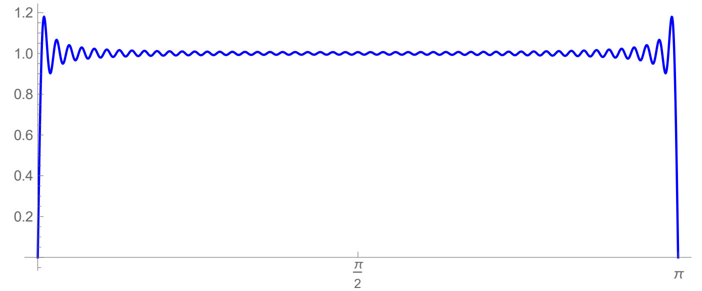
Ohne Beweis bemerken wir, dass man jede Funktion $f \in L^2(0,\pi)$ *mit Hilfe der Fourier-Sinus-Reihenentwicklung schreiben kann:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, f \rangle e_k(x).$$

Also ist S *ein vollständiges Orthonormalsystem fur* $L^2(0,\pi)$. *Unten findet man einige Approximationen für* $f(x) = 1$.



Eine Skizze der hundertsten Approximation ist wie folgt:



Die Konvergenz der Approximationen ist bezüglich der L^2*-Norm und nicht unbedingt punktweise. Man sieht das zum Beispiel, wenn für alle* n *gilt, dass*

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k(x)$$

während $f_n(0) = 0 \neq f(0)$.

Beispiel 5.8 *Die Standard-Fourier-Reihenentwicklung für* $L^2(0,\pi)$ *verwendet* $E = \{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *mit*

$$e_k(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i2kx}.$$

Weil diese Funktionen komplexwertig sind, soll man den Hilbertraum $L^2((0,\pi);\mathbb{C})$ betrachten mit dem komplexen inneren Produkt

$$\langle u,v\rangle = \int_0^\pi \overline{u(x)}v(x)\,dx.$$

Stattdessen kann man auch die e_k paarweise kombinieren zu

$$c_k(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e_k(x)+e_{-k}(x)\right) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cos(2kx) \text{ für } k\in\mathbb{N},$$
$$s_k(x) = \tfrac{1}{i\sqrt{2}}\left(e_k(x)-e_{-k}(x)\right) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin(2kx) \text{ für } k\in\mathbb{N}^+.$$

Fur $m\in\mathbb{N}$ gilt mit der komplexwertigen linearen Hülle, dass

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left(\{e_k\}_{k=-m}^m\right) = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left(\{c_k\}_{k=0}^m \cup \{s_k\}_{k=1}^m\right).$$

Für $CS = \{c_k, s_{k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ gilt $\langle c_k, s_{m+1}\rangle = 0$, $\langle c_k, c_m\rangle = \delta_{km}$, $\langle s_{k+1}, s_{m+1}\rangle = \delta_{km}$ für alle $k,m\in\mathbb{N}$ also ist CS orthonormal. Die Menge CS ist sogar ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(0,\pi)$:

$$\overline{\operatorname{Span}(CS)} = L^2(0,\pi).$$

Man beweist dieses Ergebnis meistens in zwei Schritten: 1) Wähle einen geschickten Teilraum $X\subset L^2(0,\pi)$ und zeige $\overline{X} = L^2(0,\pi)$, und 2) Zeige, dass jedes Element in X mit trigonometrischen Polynomen in L^2-Norm zu approximieren ist.

. . . .

Aufgabe 5.3 *Sei E und CS wie in Beispiel 5.8. Wir setzen $E_n = \{e_k\}_{-n\le k\le n}$ und $CS_n = \{c_k\}_{0\le k\le n}\cup\{s_k\}_{1\le k\le n}$. Zeigen Sie, dass*

1. $P_{E_n}(v) = P_{CS_n}(v)$ *für* $v\in L^2(0,\pi)$.
2. $\sum_{k=-n}^n e^{i2kx} = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} =: D_n(x)$ *für* $x\in(-\pi,\pi)\backslash\{0\}$.
3. $P_{CS_n}(v)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi v(t)\,D_n(x-t)\,dt$ *für* $v\in L^2(0,\pi)$.

Aufgabe 5.4 *Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ π-periodisch. Zeigen Sie, dass*

1. $P_{CS_n}(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x-t)\, D_n(t)\, dt$.

2. $f(x) - P_{CS_n}(f)(x)$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(f(x) - f(x-t)\right) D_n(t)\, dt.$$

3. *Weil $f \in C^1(\mathbb{R})$, gilt für*
$$v(t) = \begin{cases} f'(x) & \text{für } t = 0, \\ \frac{f(x)-f(x-t)}{\sin(t)} & \text{für } t \neq 0, \end{cases}$$
dass $v \in C^0\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$.

4. *Das Theorem von Riemann-Lebesgue sagt, dass*
$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b g(t) \sin(kt)\, dt = 0$$
für jede integrierbare Funktion g.
Dann gilt
$$P_{CS_n}(f)(x) \to f(x) \text{ für } n \to \infty,$$
jedoch nur punktweise.

5.2 Positiv definite Operatoren

Definition 5.9 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum. Der lineare Operator $A : H \to H$ heißt* ***strikt positiv definit****, wenn es $c \in \mathbb{R}^+$ gibt mit*
$$\langle Av, v\rangle \geq c\,\|v\|^2 \text{ für alle } v \in H. \tag{5.4}$$

Wenn $\langle Av, v\rangle > 0$ für alle $v \in H\backslash\{0\}$, könnte man dies positiv definit nennen. Diesen Begriff werden wir nicht verwenden.

Strikt positiv definit bedeutet nicht unbedingt, dass wenn H auch noch eine Ordnung $\geq$ hat, dass $v \geq 0$ impliziert $Av \geq 0$.

Lemma 5.10 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und sei $A : H \to H$ ein strikt positiv definiter, stetiger, linearer Operator. Dann existiert $A^{invers} : H \to H$, also*
$$A\,A^{invers}u = u = A^{invers}Au \text{ für alle } u \in H,$$
ist linear und linear beschränkt.

Beweis.

1. A ist injektiv: Wenn $Av = 0$, dann folgt $v = 0$ aus (5.4).

2. $\|Av\| \geq c\,\|v\|$ für alle $v \in H$: Dies folgt aus
$$c\,\|v\|^2 \leq \langle Av, v\rangle \leq \|Av\|\,\|v\|.$$

3. $A(H)$ ist abgeschlossen: Wenn $Av_n \to w$ für $n \to \infty$, dann ist $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ Cauchy, weil
$$\|v_n - v_m\| \leq \tfrac{1}{c}\,\|Av_n - Av_m\| \to 0 \text{ für } n, m \to \infty$$
und deshalb konvergent. Es gibt $v \in H$ mit $v_n \to v$ und die Stetigkeit von A liefert $Av_n \to Av = w \in A(H)$.

4. A ist surjektiv: Weil $A(H)$ abgeschlossen ist, gilt wegen Theorem 4.19, dass
$$H = A(H) \oplus A(H)^{\perp}.$$
Nehme an, es gibt $w \in A(H)^{\perp} \setminus \{0\}$. Dann gilt
$$c\|w\|^2 \leq \langle Aw, w\rangle = 0$$
und $w = 0$, ein Widerspruch.

5. Surjektiv und injektiv bedeutet A^{invers} existiert.

6. Die Linearität von A^{invers} folgt aus der von A.

7. $\left\|A^{\text{invers}}\right\| \leq \frac{1}{c}$: Dies folgt aus
$$\|v\| = \left\|AA^{\text{invers}}v\right\| \geq c\left\|A^{\text{invers}}v\right\|. \qquad \blacksquare$$

Definition 5.11 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum. Die Abbildung*
$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$
*heißt eine **Bilinearform**, wenn*

1. $u \mapsto B(u, v)$ linear ist für alle $v \in H$,

2. $v \mapsto B(u, v)$ linear ist für alle $u \in H$.

*Man nennt die Bilinearform B **stetig**, wenn*

3. es $C \in \mathbb{R}^+$ gibt mit
$$|B(u, v)| \leq C\|u\|\|v\| \text{ für alle } u, v \in H.$$

Definition 5.12 *Eine Bilinearform heißt **strikt positiv definit**, wenn es $c \in \mathbb{R}^+$ gibt, mit*
$$B(v, v) \geq c\|v\|^2 \text{ für alle } v \in H.$$

Theorem 5.13 (Lax-Milgram)
Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und $B : H \times H \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, die außerdem strikt positiv definit ist. Dann gibt es für jedes $f \in H$ genau eine Lösung $u \in H$ von
$$B(u, v) = \langle f, v\rangle \text{ für alle } v \in H.$$

Beweis. Für jedes $u \in H$ ist $v \mapsto B(u, v)$ eine stetige lineare Abbildung. Durch den Darstellungssatz von Riesz gibt es, nennen wir es $Au \in H$, derart, dass
$$B(u, v) = \langle Au, v\rangle \text{ für alle } v \in H.$$
Weil $u \mapsto B(u, v)$ linear ist, ist auch A linear.
Weil $c\|u\|^2 \leq B(u, u) = \langle Au, u\rangle$, ist A strikt positiv definit.
Mit Lemma 5.10 folgt, dass A bijektiv ist mit einer linear beschränkten Inverse A^{invers}. Also existiert für jedes $f \in H$ genau ein $u \in H$ mit $Au = f$. Das liefert genau die Aussage des Theorems, denn $B(u, v) = \langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$. $\blacksquare$

. . . .

Aufgabe 5.5 *Wir betrachten die stetigen Bilinearformen B auf $H = \mathbb{R}^n$ mit dem üblichen inneren Produkt.*

1. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und setze
$$B(x, y) := x \cdot Ay \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
Dann ist B eine stetige Bilinearform. Zeigen Sie dies.

2. *Kann man alle stetigen Bilinearformen B auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ so schreiben?*

3. *Gibt die Matrix A mit $A_{ij} = 0$ für $i < j$ und $A_{ij} = 1$ für $i \geq j$ eine strikt positive Bilinearform?*

Aufgabe 5.6 *Betrachte $(L^2(-1,1), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem üblichen inneren Produkt. Welche Abbildungen B erfüllen für welche $c \in \mathbb{R}$ die Bedingungen von Lax-Milgram?*

1. $B(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x)\, dx + c\, \|u\|_{L^2(-1,1)} \|v\|_{L^2(-1,1)}$.

2. $B(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x)\, dx + c \int_{-1}^{1} u(x)\, dx \int_{-1}^{1} v(y)\, dy$.

3. $B(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x)\, dx + c \int_{-1}^{0} u(x)\, dx \int_{0}^{1} v(y)\, dy$.

4. $B(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)\, v(x)\, dx + c\; u(0)\, v(0)$.

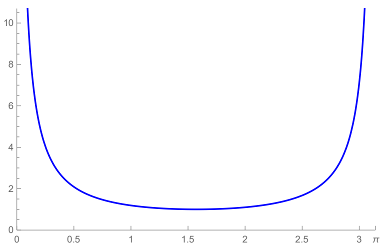
5. $B(u,v) = \int_{-1}^{1} \cosh(x)\, u(x)\, v(x)\, dx$
$$+c \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} u(x) \sin(x-y)\, v(y)\, dx dy.$$

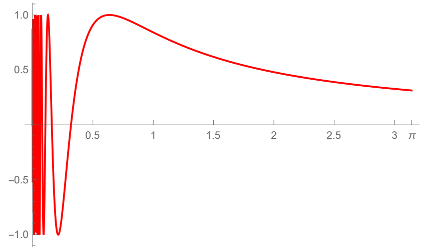
Kapitel 6

Funktionenräume

6.1 1-d. stetige Funktionen

Die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ notiert man durch $C(I)$. Zum Beispiel sind $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ und $g(x) = \sin(1/x)$ stetig auf $(0, \pi)$.





Wenn I nicht abgeschlossen ist, gibt es keine offensichtliche Norm und uns bleibt nur ein metrischer Raum. Wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, sagen wir $I = [a, b]$ mit $a < b$ in $\mathbb{R}$, dann ist $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ mit

$$\|u\|_\infty := \sup\{|u(x)|; x \in [a, b]\}.$$

Außerdem ist das Supremum für jedes $u \in C[a, b]$ sogar ein Maximum und jede Funktion $u \in C[a, b]$ ist gleichmäßig stetig:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x, y \in [a, b] :$$
$$|x - y| < \delta_\varepsilon \implies |u(x) - u(y)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 6.1 *Sei $u \in C[a, b]$.*

1. Zeigen Sie

$$\sup\{|u(x)|; a \le x \le b\} = \max\{|u(x)|; a \le x \le b\}.$$

2. *u ist gleichmäßig stetig.*

   Wenn nicht, dann gäbe es $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ mit $x_n, y_n \in [a, b]$, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|u(x_n) - u(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

   Zeigen Sie, dass dies einen Widerspruch erzeugt.

Wenn das Intervall I unbeschränkt ist, dann gibt es stetige Funktionen, die unbeschränkt sind. Achtung, hier wird beschränkt im ursprünglichen Sinne verwendet und es ist nicht das „linear beschränkt“ gemeint! Um doch einen normierten Vektorraum zu bekommen betrachtet man

$$\begin{aligned} BC(I) &:= \{u \in C(I); \|u\|_\infty < \infty\} \\ \text{mit} \quad \|u\|_\infty &= \sup\{|u(x)|; x \in I\}. \end{aligned}$$

Wenn I kompakt ist, dann gilt $BC(I) = C(I)$. Wenn I nicht kompakt ist, dann enthält $BC(I)$ nicht gleichmäßig stetige Funktionen.

Aufgabe 6.2 *Begründen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig und beschränkt, jedoch nicht gleichmäßig stetig sind:*

1. *$u : (0, 3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.*
2. *$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $v(x) = \sin(x^2)$.*

Wir sind grundsätzlich interessiert an der Frage, ob und wie man Funktionen approximieren kann und dazu gehört die Frage, ob wir einen Banachraum haben. Dazu erst ein paar Beispiele.

Beispiel 6.1 *Betrachte die Funktionenfolge*

$$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset C[0, 1] \text{ mit } u_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

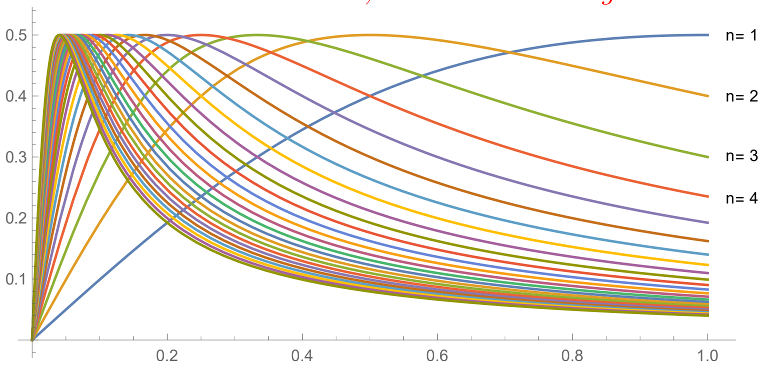
Es gilt $u_n(0) = 0$ und für jedes $x > 0$, dass

$$0 \leq u_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{n}x^{-1}.$$

Weil $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0 \text{ für alle } x \in [0, 1]. \tag{6.1}$$

Wenn wir die ersten 25 Funktionen in der Folge zeichnen lassen, dann sieht es nicht so aus, als ob es konvergiert:



Der Ausdruck in (6.1) bedeutet, dass die Folge punktweise konvergiert. Betrachtet man jedoch die Konvergenz in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm, dann findet man

$$\|u_n - 0\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |u_n(x)| = u_n\left(\tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{2} \not\to 0.$$

In dieser Norm konvergiert die Folge nicht!

Ist diese punktweise Konvergenz dann nichts wert? Doch, wie das folgende Lemma zeigt. Um einen eventuellen Limes-Kandidaten zu finden, berechnet man als erstes den punktweisen Limes. Obwohl dieses Ergebnis offensichtlich ist, wollen wir es hier doch melden.

Lemma 6.2 *Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[a,b]$ eine in $\|\cdot\|_\infty$-Norm nach $u \in C[a,b]$ konvergente Folge. Dann gilt für alle $x \in [a,b]$, dass*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x).$$

....

Aufgabe 6.3 *Beweisen Sie Lemma 6.2.*

Aufgabe 6.4 *Zeigen Sie, dass $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset C[0,\infty)$, definiert durch $w_k(x) = \frac{kx}{1+k^2x}$, konvergiert in $\|\cdot\|_\infty$-Norm.*

Aufgabe 6.5 *Definiere $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset C[0,1]$ durch $u_k(x) = \frac{kx}{1+k\,x^2}$.*

1. *Konvergiert u_n punktweise?*
2. *Konvergiert $\|u_n\|$?*

Aufgabe 6.6 *Definiere $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset BC(\mathbb{R})$ durch $v_k(x) = \sin\left(\left(x-\frac{1}{n}\right)^2\right)$.*

1. *Konvergiert v_n punktweise?*
2. *Konvergiert v_n in $\|\cdot\|_\infty$-Norm?*

Definition 6.3 *Sei $k \in \mathbb{N}^+$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Für die Menge der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf I schreibt man $C^k(I)$.*

Um dies genau festzulegen, verwendet man diese iterative Art: Man sagt $f \in C^k(I)$, wenn $g \in C^{k-1}(I)$ existiert derart, dass

$$f'(x) = g(x) \text{ für alle } x \in I^\circ,$$

mit I° die größte offene Menge in I. Um zu differenzieren in x braucht man ja eine offene Umgebung von x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

6.2 Mehr-dimensionale stetige Funktionen

Ähnliches macht man auch für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Definition 6.4 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann definiert man:*

$$\begin{aligned} C(A) &:= \{u : A \to \mathbb{R}; u \text{ ist stetig auf } A\}, \\ BC(A) &:= \{u \in C(A); \|u\|_\infty < \infty\}. \end{aligned}$$

Lemma 6.5 *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $(BC(A), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.*

Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist, dann gilt $C\left(\overline{\Omega}\right) = BC\left(\overline{\Omega}\right)$ und dann ist also auch $\left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ ein Banachraum.

Beweis. 1) Sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(BC(A), \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in A$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und deshalb konvergent. Man definiert

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

2) Sei $\varepsilon > 0$ und wähle:

- $k_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N}$ derart, dass $k, m > k_{\varepsilon,1} \implies \|f_k - f_m\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon$;
- $k_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ derart, dass $k > k_{\varepsilon,x} \implies |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Dann gilt für $k > k_{\varepsilon,1}$ und $\ell > \max(k_{\varepsilon,1}, k_{\varepsilon,x})$, dass

$$|f(x) - f_k(x)| \le |f(x) - f_\ell(x)| + \|f_\ell - f_k\|_\infty < \varepsilon.$$

Für jedes $x \in A$ und $k > k_{\varepsilon,1}$ gilt also $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$, und so folgt

$$\|f_k - f\|_\infty \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

3) Die Stetigkeit sieht man ähnlich: Sei $\varepsilon > 0$ und N_ε derart, dass für $n > N_\varepsilon$ gilt $\|f - f_n\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$. Nehme $n = N_\varepsilon + 1$ und für alle $x, y \in A$ gilt dann folgendes:

$$\begin{aligned} &|f(x) - f(y)| \\ &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\le 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(y)| \\ &< \tfrac{2}{3}\varepsilon + |f_n(x) - f_n(y)|. \end{aligned}$$

Wenn f_n stetig ist in x, gibt es $\delta_{\varepsilon,x} > 0$ derart, dass für $|x - y| < \delta_{\varepsilon,x}$ folgt $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ und dann auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. ■

Man hat bemerkt, dass punktweise Konvergenz, also $u_m(x) \to u(x)$ für alle $x \in A$, viel schwächer ist als gleichmäßige Konvergenz: $\|u_m - u\|_{L^\infty(A)} \to 0$. Es gibt eine Ausnahme, wenn man zusätzlich die Monotonizität der Folge und die Kompaktheit des Gebietes voraussetzt. Das Ergebnis findet man in dem nächsten Theorem von Dini.

Theorem 6.6 (Dini: gleichmäßige Konvergenz bei wachsenden Funktionenfolgen) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ eine Funktionenfolge mit folgenden Eigenschaften:*

- *$f_k(x) \le f_m(x)$ für alle $x \in K$ und $k \le m$;*
- *$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in K$ und $f \in C(K)$.*

Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_\infty = 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Weil f_k punktweise nach f konvergiert, gibt es für jedes $x \in K$ eine Zahl $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$k \geq N_{x,\varepsilon} \implies |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Sowohl $f_{N_{x,\varepsilon}}$ als f sind stetig und das bedeutet, es gibt $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ mit

$$y \in B_{\delta_{x,\varepsilon}}(x) \cap K \implies \begin{cases} \left|f_{N_{x,\varepsilon}}(x) - f_{N_{x,\varepsilon}}(y)\right| < \varepsilon, \\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Betrachte die Überdeckung $\left\{B_{\delta_{x,\varepsilon}}(x)\right\}_{x\in\overline{\Omega}}$ von K. Weil K kompakt ist, kann man endlich viele Elemente aus dieser Überdeckung wählen, und zwar derart, dass $\left\{B_{\delta_{x_m,\varepsilon}}(x_m)\right\}_{m=1}^{M}$ schon K überdeckt. Setze $N_\varepsilon = \max_{1\leq m\leq M} N_{x_m,\varepsilon}$. Für jedes $y \in K$ gibt es eine Kugel $B_{\delta_{x_m,\varepsilon}}(x_m) \ni y$ und für $m \geq N_\varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} f(y) \geq f_m(y) \geq f_{N_{x_m,\varepsilon}}(y) &> f_{N_{x_m,\varepsilon}}(x_m) - \varepsilon \\ &> f(x_m) - 2\varepsilon > f(y) - 3\varepsilon. \qquad (6.2) \end{aligned}$$

Für $m > N_\varepsilon$ gilt also $\|f - f_m\|_\infty \leq 3\varepsilon$. ■

. . . .

Aufgabe 6.7 *Geben Sie bei jeder Ungleichung in (6.2) die Begründung an.*

Aufgabe 6.8 *Wir definieren $f_0(x) := x$ und für $n \in \mathbb{N}$:*

$$f_{n+1}(x) := \sin(f_n(x)).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 6.9 *Wir betrachten $u_k(x) = e^{-|x|^2/k^2}$ für $x \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Für welche A gilt $u_n \in BC(A)$?*
2. *Für welche A gilt $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ konvergiert in $(BC(A), \|\cdot\|_\infty)$?*

Aufgabe 6.10 *Beantworten Sie die gleichen Fragen bei $u_k(x) = e^{-k^2|x|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^n$.*

6.3 Gleichgradige Stetigkeit

Definition 6.7 *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\{f_i : E \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ eine Menge stetiger Funktionen. Diese Menge nennt man **gleichgradig stetig** in x, wenn*

$$\begin{gathered} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall i \in I\ \forall y \in E : \\ |x - y| < \delta \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, das nicht vom Index i abhängt. Allgemein hängt δ jedoch von x und ε ab und man sollte vielleicht $\delta_{\varepsilon,x}$ schreiben.

- Wenn die Definition zutrifft für jedes $x \in E$, dann ist Menge punktweise gleichgradig stetig:

$$\begin{aligned} &\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0\ \forall i \in I\ \forall y \in E : \\ &|x-y| < \delta_{\varepsilon,x} \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.3}$$

- Die Menge ist gleichmäßig gleichgradig[1] stetig, wenn:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_{\varepsilon} > 0\ \forall i \in I\ \forall x,y \in E : \\ &|x-y| < \delta_{\varepsilon} \implies |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Lemma 6.8 *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\{f_i : E \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ eine Menge punktweise gleichgradig stetiger Funktionen. Dann ist die Menge gleichmäßig gleichgradig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in E$ sei $\delta_{\varepsilon,x}$ eine zu ε und x passende Zahl aus (6.3). Weil E kompakt ist, kann man E mit endlich vielen $B_{\frac12\delta_{\varepsilon,x}}(x)$ überdecken, sagen wir $E \subset \bigcup_{k=1}^K B_{\frac12\delta_{\varepsilon,x_k}}(x_k)$. Wir setzen $\delta_\varepsilon = \min_{1\le k\le K} \frac12 \delta_{\varepsilon,x_k}$. Seien nun $x,y \in E$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$. Dann gibt es eine Kugel $B_{\frac12\delta_{\varepsilon,x_k}}(x_k) \ni x$ und weil $|x-y| < \frac12\delta_{\varepsilon,x_k}$, findet man $y \in B_{\delta_{\varepsilon,x_k}}(x_k)$. Es folgt für alle f_i, dass

$$|f_i(x) - f_i(y)| \le |f_i(x) - f_i(x_k)| + |f_i(x_k) - f_i(y)| < 2\varepsilon.$$

Wer ε als Abschätzung haben möchte, darf selber basteln. ■

Sie erinnern sich, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind. Der Beweis ist sehr ähnlich.

[1] gleichmäßig = uniformly; gleichgradig stetig = equicontinuous.

Theorem 6.9 (Arzelà-Ascoli) *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $\{f_k : E \to \mathbb{R}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge gleichgradig stetiger Funktionen derart, dass für alle $x \in E$ gilt*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)| < \infty \text{ für alle } x \in E. \tag{6.5}$$

Dann gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ und $f \in C(E)$ mit $\|f_{k_m} - f\|_\infty \to 0$ für $m \to \infty$.

Beweis. Für jedes $N \in \mathbb{N}^+$ kann man E mit endlich vielen Kugeln $\left\{B_{1/N}(x_{N,\ell})\right\}_{\ell=1}^{L_N}$ und $x_{N,\ell} \in E$ überdecken.

- Für $N = 1$ ist $\{f_i(x_{1,1}), \dots, f_i(x_{1,L_1})\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^{L_1}$, die beschränkt ist wegen (6.5) und also eine konvergente Teilfolge $\{f_{i_m}(x_{1,1}), \dots, f_{i_m}(x_{1,L_1})\}_{m\in\mathbb{N}}$ hat.
- Für $N = 2$ ist $\{f_{i_m}(x_{2,1}), \dots, f_{i_m}(x_{2,L_2})\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^{L_2}$, die beschränkt ist wegen (6.5) und also eine konvergente Teilfolge $\left\{f_{i'_m}(x_{2,1}), \dots, f_{i'_m}(x_{2,L_2})\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ hat.
- Für $N = 3$ ist ... .

Dies benutzt man für ein Diagonalverfahren: Man bekommt eine Funktionenfolge

$$\{f_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}} := \{f_1, f_{i_2}, f_{i'_3}, f_{i''_4}, \dots\}$$

und diese Folge konvergiert in alle $x_{N,\ell}$. Wegen Lemma 6.8 sind diese Funktionen gleichmäßig gleichgradig stetig. Dadurch ist nicht nur

$$g(x_{N,\ell}) := \lim_{m\to\infty} f_{k_m}(x_{N,\ell})$$

wohl-definiert, sondern auch

$$g(x) := \lim_{m\to\infty} g(x_{N_m,\ell_m}) \text{ für } x_{N_m,\ell_m} \to x.$$

Das letzte sieht man wie folgt:

1) Wir schreiben $E_\# = \{x_{N,\ell}; 1 \le \ell \le L_N \text{ und } N \in \mathbb{N}\}$. Weil $E_\#$ dicht in E liegt, gibt es Folgen $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset E_\#$ mit $x_m \to x$.

2) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es m_ε mit für $m > m_\varepsilon$, dass $|x_m - x| < \delta_\varepsilon$ und dann auch $|f_k(x_m) - f_k(x)| < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt für $m_1, m_2 > m_\varepsilon$, dass

$$\begin{aligned} |g(x_{m_1}) - g(x_{m_2})| &\le |g(x_{m_1}) - f_{k_M}(x_{m_1})| \\ &+ |f_{k_M}(x_{m_1}) - f_{k_M}(x_{m_2})| + |f_{k_M}(x_{m_2}) - g(x_{m_2})|. \end{aligned}$$

Für M genügend groß findet man $|g(x_{m_i}) - f_{k_M}(x_{m_i})| < \varepsilon$ für $i = 1, 2$ und es folgt

$$|g(x_{m_1}) - g(x_{m_2})| < 3\varepsilon.$$

Dies zeigt $\{g(x_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge und deshalb auch konvergent.

3) Ähnlich zeigt man auch, dass $g(x) := \lim_{m\to\infty} g(x_m)$ nicht von der gewählten Folge $x_m \to x$ abhängt.

Schlussendlich muss man noch zeigen, dass $g \in C(E)$ gilt. Auch hier helfen ähnliche Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\le |g(x) - g(x_m)| + |g(x_m) - f_{k_M}(x_m)| + \\ |f_{k_M}(x_m) - f_{k_M}(y_m)| &+ |f_{k_M}(y_m) - g(y_m)| + |g(y_m) - g(y)|. \end{aligned}$$

Für $|f_{k_M}(x_m) - f_{k_M}(y_m)| < \varepsilon$ nimmt man $|x_m - y_m|$ genügend klein und das gelingt, wenn man $|x - y| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ nimmt. Die restlichen Termen bekommt man klein, weil $|g(x_m) - g(x)| < \varepsilon$ und $|g(y_m) - g(y)| < \varepsilon$ für $m > m_\varepsilon$. Bei festem m folgt $|g(x_m) - f_{k_M}(x_m)| < \varepsilon$ und $|f_{k_M}(y_m) - g(y_m)| < \varepsilon$ für M genügend groß. ■

6.4 C^k-Funktionen

Definition 6.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, also offen und zusammenhängend. Schreibt man $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ und.$C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$, dann kann man iterativ $C^k(\Omega)$ und $C^k(\overline{\Omega})$ definieren durch:*

- *$f \in C^k(\Omega)$ wenn f stetig differenzierbar ist auf Ω und für die partiellen Ableitungen gilt $\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f \in C^{k-1}(\Omega)$.*
- *$f \in C^k(\overline{\Omega})$ wenn f stetig differenzierbar ist auf Ω und für die partiellen Ableitungen gibt es $g_1, \dots, g_n \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ mit $g_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} f$, ... , $g_n = \frac{\partial}{\partial x_n} f$ auf Ω.*

Definition 6.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}$, definiert durch*

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sup \left\{ \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_\alpha} \right\|_\infty ; x \in \Omega \text{ und } |\alpha| \le k \right\}$$

eine Norm auf $C^k(\overline{\Omega})$.

Hier ist α ein Multiindex, das heißt $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Man schreibt $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_\alpha} u := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u$.

Lemma 6.12 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(C^k\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}\right)$ ein Banachraum.*

Wir werden einen Beweis dieses Lemmas nur skizzieren: Sei $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der $\|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}$-Norm. Dann ist $\left\{\frac{\partial^{|a|}}{\partial x_\alpha} u_m\right\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der $\|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})}$-Norm für alle α mit $|\alpha| \le k$. Mit Lemma 6.5 folgt, dass jede solche Ableitung konvergiert: Es gibt passende $g_\alpha \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ für alle α mit $|\alpha| \le k$ und derart, dass

$$\left\|\frac{\partial^{|a|} u_m}{\partial x_\alpha} - g_\alpha\right\|_\infty \to 0 \text{ für } m \to \infty.$$

Das reicht noch nicht. Man muss noch zeigen, dass die Ableitungen zueinander passen, also für $x \in \Omega$ und $|\alpha| < k$ soll gelten, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_\alpha(x) = g_{\alpha+e_i}(x)$$

mit $\alpha + e_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i + 1, \ldots, \alpha_n)$. Und dafür braucht man, dass g_α differenzierbar ist für $|\alpha| < k$. Für die Differenzierbarkeit soll man zeigen, dass

$$\left|\frac{\frac{\partial^{|a|}}{\partial x_\alpha} u_m(x+he_i) - \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_\alpha} u_m(x)}{h} - \frac{g_\alpha(x+he_i) - g_\alpha(x)}{h}\right| \to 0$$

und für die Passfähigkeit, dass $\left|\frac{\partial}{\partial x_i} g_\alpha(x) - g_{\alpha+e_i}(x)\right|$ beliebig klein ist, indem man Termen mit u_m dazwischen setzt und öfter die Dreiecksungleichung verwendet.

. . . .

Aufgabe 6.11 *Wir betrachten $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset C^1(\overline{B_1(0)})$, definiert auf $\overline{B_1(0)} = \{(x,y); x^2 + y^2 \le 1\}$ durch*

$$u_n(x,y) = \sqrt{\tfrac{1}{n^2} + x^2 + y^2}.$$

1. *Konvergiert u_n in $\left(C(\overline{B_1(0)}), \|\cdot\|_\infty\right)$?*
2. *Konvergiert u_n in $(L^2(B_1(0)), \|\cdot\|_2)$?*
3. *Konvergiert u_n in $\left(C^1(\overline{B_1(0)}), \|\cdot\|_{C^1}\right)$?*

6.5 $C^{k,\gamma}$-Funktionen

Es gibt zwischen C^k und C^{k+1} noch weitere Funktionenklassen.

Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass Ω ein beschränktes Gebiet ist. Für unbeschränkte Gebiete kann man die Definitionen anpassen, indem man die Bedingung verlangt auf jedem beschränkten Teilgebiet.

Definition 6.13 *Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nennt man Hölder-stetig mit Koeffizienten $\gamma \in (0,1]$ an der Stelle $x \in \Omega$, wenn folgendes gilt:*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \ \forall y \in \Omega \setminus \{x\} : \frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|^\gamma} \leq M. \tag{6.6}$$

Wenn $\gamma = 1$, dann nennt man f Lipschitz-stetig in x.

Wenn (6.6) für jedes $x \in \Omega$ gilt, dann heißt f Hölder-stetig mit Koeffizienten $\gamma \in (0,\gamma]$ auf Ω und man schreibt $f \in C^{0,\gamma}(\Omega)$. Ohne Gleichmäßigkeit hat man jedoch noch nicht so viel.

Definition 6.14 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man definiert für $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die **Hölder-Seminorm**:*

$$[f]_\gamma := \sup_{x \neq y \in \overline{\Omega}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Weil für konstante Funktionen f gilt, dass $[f]_\gamma = 0$, kann es an sich keine Norm sein.

Lemma 6.15 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\gamma \in (0,\gamma]$. Dann ist $\left(C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\gamma}\right)$ mit*

$$\|f\|_{0,\gamma} := \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + [f]_\gamma\,, \tag{6.7}$$

$$C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) := \left\{ f \in C(\overline{\Omega}); [f]_\gamma < \infty \right\} \tag{6.8}$$

ein normierter Vektorraum.

Beweis. Weil $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ eine Norm ist, muss man nur die Homogenität und die Dreiecksungleichung für $[\cdot]_\gamma$ zeigen. Beides folgt sehr direkt:

$$[tf]_\gamma = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|tf(x) - tf(y)|}{|x-y|^\gamma} = |t|\,[f]_\gamma$$

und

$$\begin{aligned}
[f+g]_\gamma &= \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))|}{|x-y|^\gamma} \\
&\leq \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|}{|x-y|^\gamma} \\
&\leq [f]_\gamma + [g]_\gamma\,.
\end{aligned}$$

Hier wurden nur zwei elementäre Abschätzungen benutzt. ∎

Lemma 6.16 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$. Dann gilt*

$$C(\overline{\Omega}) \supsetneq C^{0,\gamma_1}(\overline{\Omega}) \supsetneq C^{0,\gamma_2}(\overline{\Omega}) \supsetneq C^{0,1}(\overline{\Omega}).$$

Wenn es $L \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass jedes Paar $\{x,y\} \in \overline{\Omega}^2$ durch einen Polygonzug $[x, a_1, a_2, \ldots, a_m, y] \subset \overline{\Omega}$ zu verbinden ist mit

$$|x - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_m - y| \leq L\,|x-y| \tag{6.9}$$

dann gilt außerdem, dass $C^{0,1}(\overline{\Omega}) \supsetneq C^1(\overline{\Omega})$.

Beweis. Erst folgt eine Bemerkung zu der Seminorm $[\cdot]_\gamma$. Obwohl das Supremum für $x \neq y \in \Omega$ genommen wird, zählt

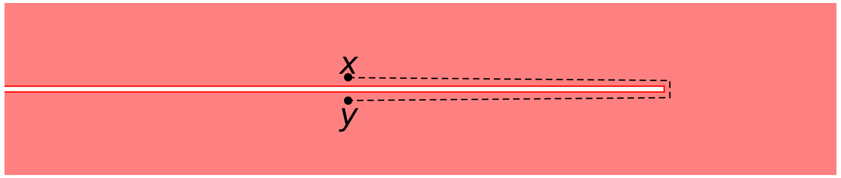


Abbildung 6.1: Ein Gebiet mit „Schlitz“ erfüllt nicht die Polygonzugbedingung (6.9).

nur das Supremum für $x \neq y$ mit $|x-y|$ klein, denn für $|x-y| > \varepsilon$ gilt

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \leq 2\varepsilon^{-\gamma} \|f\|_{\infty}.$$

Um zu zeigen, dass eine der zugehörigen Normen endlich ist, reicht es, wenn wir statt $\|f\|_{0,\gamma}$ die folgende Norm betrachten

$$\|f\|_{0,\gamma}^{*} = \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \sup_{\substack{x\neq y\in\overline{\Omega}\\ |x-y|\leq 1}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\gamma}}.$$

Hier sieht man dann direkt, dass für $0<\gamma_1\leq\gamma_2\leq 1$ gilt

$$\|f\|_{0,\gamma_1}^{*} \leq \|f\|_{0,\gamma_2}^{*}$$

und damit, dass $C^{0,\gamma_1}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\gamma_2}(\overline{\Omega}) \subset C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Die Inklusion $C(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\gamma_1}(\overline{\Omega})$ folgt direkt. Für $C^{0,1}(\overline{\Omega}) \subset C^{1}(\overline{\Omega})$ benutzt man, wenn $[x,y]\subset\overline{\Omega}$, dass es $\theta\in[0,1]$ gibt mit

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \left|\frac{\partial}{\partial t} f(x+t(y-x))\right|_{t=\theta} \leq \|\nabla f\|_{\infty}.$$

Im Fall, dass man x und y nur durch einen Polygonzug verbinden kann, benutzt man

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f(a_1)| + \cdots + |f(a_m)-f(y)| \\ &\leq \|\nabla f\|_{\infty} (|x-a_1| + \ldots |a_m-y|) \\ &\leq L \|\nabla f\|_{\infty} |x-y|.\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die Inklusionen strikt sind, nehmen wir an, dass $0\in\Omega$ und betrachten die Funktionen

$$\left\{|x|^{\frac{1}{2}\gamma_1}, |x|^{\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}, |x|^{\frac{1}{2}\gamma_2+\frac{1}{2}}, |x|\right\}$$

bei $y=0$. ■

Definition 6.17 *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $k\in\mathbb{N}^+$ und $\gamma\in(0,1]$. Man definiert $\left(C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{k,\gamma}\right)$ durch*

$$\|f\|_{k,\gamma} := \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sup_{|\alpha|=k} \left[\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f\right]_{\gamma}, \tag{6.10}$$

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \left\{f\in C^k(\overline{\Omega}); \|f\|_{k,\gamma} < \infty\right\}. \tag{6.11}$$

Die Vektorräume $\left(C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{k,\gamma}\right)$ mit $k\in\mathbb{N}$ und $\gamma\in(0,1]$ werden **Hölderräume** genannt. Manchmal schreibt man

$$C^{k,0}(\overline{\Omega}) := C^{k}(\overline{\Omega})$$

und dann gilt $C^{0,0}(\overline{\Omega}) = C^{0}(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$. Einige Autoren verwenden auch $C^{k+\gamma}(\overline{\Omega})$ statt $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$, nur ist diese Notation unklar für $\gamma=1$.

6.6 Approximationssatz von Stone-Weierstraß

Ein Produkt auf V ist eine bilineare Abbildung $V \times V \to V$: für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}(\alpha u + \beta v) \times w &= \alpha (u \times w) + \beta (v \times w), \\ u \times (\alpha v + \beta w) &= \alpha (u \times v) + \beta (u \times w).\end{aligned}$$

Definition 6.18 *Ein Banachraum $(V, \|\cdot\|)$ nennt man eine* ***Banach-Algebra****, wenn zusätzlich für $v, w \in V$ ein Produkt*

$$(v, w) \mapsto v \times w \in V,$$

definiert ist, für das gilt

$$\|v \times w\| \leq \|v\| \, \|w\| \text{ für alle } v, w \in V. \tag{6.12}$$

Für ℓ^p und $C(E)$ ist nur das punktweise Produkt interessant. Das heißt:

- Für Folgen betrachten wir: $(x \times y)_k = x_k y_k$.
- Für Funktionen betrachten wir $(u \times v)(x) = u(x) \, v(x)$.

Die Bilinearität ist in beiden Fälle erfüllt.

. . . .

Beispiel 6.19 $(\ell^p, \|\cdot\|_\infty)$ *für $p \in [0, \infty]$ sind Banach-Algebren. Für $p = \infty$ gilt*

$$\begin{aligned}\|x \times y\|_\infty &= \sup_{k \in \mathbb{N}^+} |(x \times y)_k| = \sup_{k \in \mathbb{N}^+} |x_k| \, |y_k| \\ &\leq \left(\sup_{k \in \mathbb{N}^+} |x_k|\right) \left(\sup_{k \in \mathbb{N}^+} |y_k|\right) = \|x\|_\infty \, \|y\|_\infty .\end{aligned}$$

Das Letzte zeigt sowohl, dass $x \times y \in \ell^\infty$ für $x, y \in \ell^\infty$ als auch (6.12). Für $p \in [1, \infty)$ gilt ähnlich

$$\begin{aligned}\|x \times y\|_p &= \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k y_k|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \sum_{m=1}^\infty |y_m|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p \, \|y\|_p .\end{aligned}$$

Beispiel 6.20 *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ eine Banach-Algebra. Denn $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum, das Produkt zweier stetiger Funktionen ist wiederum stetig und außerdem gilt*

$$\begin{aligned}\|u \times v\|_\infty &= \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x) \, v(x)| \\ &\leq \left(\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|\right) \left(\sup_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|\right) = \|u\|_\infty \, \|v\|_\infty .\end{aligned}$$

Beispiel 6.21 *Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $(BC(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ eine Banach-Algebra.*

. . . .

Aufgabe 6.12 *Beweisen Sie die Aussage aus Beispiel (6.21).*

Sind die Banachräume in den nächsten Aufgaben auch Banach-Algebren? Wir verwenden jeweils das punktweise Produkt.

Aufgabe 6.13 $(c, \|\cdot\|_\infty)$.

Aufgabe 6.14 $\left(L^2(0,1), \|\cdot\|_{L^2(0,1)}\right)$.

Definition 6.22 *Ein Unterraum* V_1 *der Banach-Algebra* $(V, \|\cdot\|)$ *nennt man Unteralgebra, wenn* $v \times w \in V_1$ *gilt für alle* $v, w \in V_1$.

Lemma 6.23 *Wenn* V_1 *eine Unteralgebra der Banach-Algebra* $(V, \|\cdot\|)$ *ist, dann ist auch* $\overline{V_1}$ *eine Unteralgebra.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$v, w \in \overline{V_1} \implies v \times w \in \overline{V_1}.$$

Weil $v, w \in \overline{V_1}$, gibt es Folgen $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|v - v_n\| \to 0$ und $\|w - w_n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt jedoch auch

$$\begin{aligned} &\|v \times w - v_n \times w_n\| \\ &\leq \|v \times w - v \times w_n\| + \|v \times w_n - v_n \times w_n\| \\ &\leq \|v\| \|w - w_n\| + \|v - v_n\| \|w_n\| \\ &\leq \|v\| \|w - w_n\| + \|v - v_n\| (1 + \|w\|). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt für n genügend groß, weil

$$\|w_n\| \leq \|w_n - w\| + \|w\|.$$

Also folgt

$$\|v \times w - v_n \times w_n\| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

und wegen $v_n \times w_n \in V_1$ finden wir $v \times w \in \overline{V_1}$. ■

Definition 6.24 *Man sagt, eine Teilmenge* A *von* $C(\overline{\Omega})$ ***trennt die Punkte von*** $\overline{\Omega}$, *wenn für jedes Paar* $x, y \in \overline{\Omega}$ *mit* $x \neq y$ *eine Funktion* $f \in A$ *existiert mit* $f(x) \neq f(y)$.

. . . .

Aufgabe 6.15 *Sei* P *die Menge der Polynome.*

1. *Zeigen Sie, dass die Polynome als Teilmenge von* $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ *eine Unteralgebra bilden.*
2. *Zeigen Sie, dass die Polynome die Punkte von* $[0,1]$ *trennen.*

Wir formulieren das Resultat von Stone und Weierstraß für $C(K)$ mit $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Theorem 6.25 (Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei A eine Unteralgebra von $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, die die Punkte von K trennt und die konstanten Funktionen enthält. Dann gilt $\overline{A} = C(K)$.*

Beweis. 1. Im ersten Schritt zeigen wir folgendes:

- *Es gibt eine Folge von Polynomen $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n(x) \uparrow \sqrt{x}$ in $C[0,1]$.*

Diese Polynome werden iterativ definiert durch $p_0(x) = 0$ und

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_n(x)^2\right).$$

Also

$$\left\{0, \tfrac{1}{2}x, x - \tfrac{1}{8}x^2, \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{8}x^2 + \tfrac{1}{8}x^3 - \tfrac{1}{128}x^4, \dots\right\}.$$

Wenn $p_n(x) \le \sqrt{x}$ für $x \in [0,1]$, dann folgt

$$\begin{aligned} p_n(x) \le p_{n+1}(x) &= p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_n(x)^2\right) \\ &= \left(p_n(x) - \sqrt{x}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}p_n(x)\right) + \sqrt{x} \le \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Mit Induktion findet man so für $x \in [0,1]$, dass

$$0 = p_0(x) \le p_1(x) \le \dots \le p_n(x) \le p_{n+1}(x) \le \dots \le \sqrt{x}.$$

Weil monoton wachsende, nach oben beschränkte Folgen konvergieren, gilt außerdem, dass $p_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} p_n(x)$ existiert und

$$p_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} p_{n+1}(x) = p_\infty(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_\infty(x)^2\right).$$

Das letzte bedeutet, dass $p_\infty(x)^2 = x$ und die einzige Lösung in $[0, \sqrt{x}]$ ist $p_\infty(x) = \sqrt{x}$.

2. Mit Hilfe von Dini folgt:

- $\left\|p_n(\cdot) - \sqrt{\cdot}\right\|_{C^0[0,1]} = 0$; *die Polynome konvergieren gleichmäßig zu $\sqrt{\cdot}$ auf $[0,1]$.*

Wir haben soeben gezeigt, dass p_n monoton nach $\sqrt{\cdot} \in C[0,1]$ konvergieren und damit kann man das Theorem von Dini verwenden.

3. Als Nächstes zeigen wir:

- $f \in A \implies |f| \in \overline{A}$.

Für $f = 0$ ist die Aussage trivial, also dürfen wir annehmen, dass f nicht identisch 0 ist, und das bedeutet $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}^+$. Für $f \in A$ folgt $f/\|f\|_\infty \in A$ und $p(f/\|f\|_\infty) \in A$ für jedes Polynom p. Sogar $p\left((f/\|f\|_\infty)^2\right) \in A$ für jedes Polynom p. Weil $0 \le (f/\|f\|_\infty)^2 \le 1$ gilt, gilt dies auch für die Polynome aus dem ersten Schritt und wir finden

$$p_n\left((f/\|f\|_\infty)^2\right) \uparrow \sqrt{(f/\|f\|_\infty)^2} = |f|/\|f\|_\infty$$

und sogar

$$\lim_{n\to\infty} \left\|p_n\left((f/\|f\|_\infty)^2\right) - |f|/\|f\|_\infty\right\| = 0.$$

Das bedeutet $|f|/\|f\|_\infty \in \overline{A}$ und weil $\overline{A}$ ein Vektorraum ist, auch $|f| \in \overline{A}$.

4. Dies folgt direkt aus dem letzten Schritt:

- $f, g \in \overline{A} \implies \max(f,g), \min(f,g) \in \overline{A}$.

Bemerke, dass man durch

$$\max(f,g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f-g|)$$

und die Eigenschaften der Algebra $\overline{A}$ findet, dass $\max(f,g) \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Ähnliches gilt für $\min(f,g)$.

5. Weil A die Punkte trennt, folgt:

- *Für jedes Paar $y \neq z \in \overline{\Omega}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $f \in A$ mit $f(y) = \alpha$ und $f(z) = \beta$.*

Es gibt $g \in A$ mit $g(y) \neq g(z)$. Da $1, g \in A$, ist die folgende Funktion auch in A:

$$f(x) = \tfrac{\alpha g(z) - \beta g(y)}{g(z) - g(y)} 1 + \tfrac{\beta - \alpha}{g(z) - g(y)} g(x)$$

und f hat die gewünschten Werte.

6. Für stetige f und $y \in K$ gibt es $\tilde{f} \in \overline{A}$ mit $f(y) = \tilde{f}(y)$ und sonst kaum größer als f:

- *Für jede Funktion $f \in C(K)$, jede Stelle $y \in K$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es $f_{y,\varepsilon} \in \overline{A}$ mit $f_{y,\varepsilon}(y) = f(y)$ und*

$$f_{y,\varepsilon}(x) \leq f(x) + \varepsilon \text{ für alle } x \in K. \tag{6.13}$$

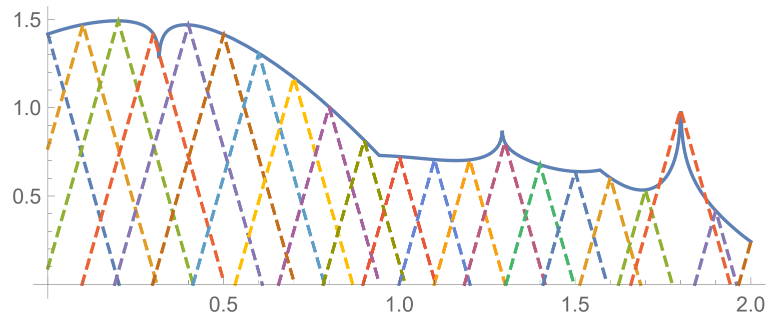
Aus Punkt 5 wissen wir, dass es $g_{y,z} \in A$ gibt mit $g_{y,z}(y) = f(y)$ und $g_{y,z}(z) = f(z)$. Weil f und $g_{y,z}$ beide stetig sind, gibt es $\delta_{z,\varepsilon} > 0$ derart, dass

$$|g_{y,z}(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in B_{\delta_{z,\varepsilon}}(z) \cap K.$$

Weil $\left\{B_{\delta_{z,\varepsilon}}(z)\right\}_{z \in \overline{\Omega} \setminus \{y\}}$ die kompakte Menge K überdeckt, gibt es endlich viele $B_{\delta_{z,\varepsilon}}(z)$ die K schon überdecken. Sagen wir $\bigcup_{m=1}^{M} B_{\delta_{z_m,\varepsilon}}(z_m) \supset K$. Wir definieren

$$f_{y,\varepsilon}(x) = \min_{1 \leq m \leq M} g_{y,z_m}(x).$$

Wegen Punkt 4 gilt $f_{y,\varepsilon} \in \overline{A}$. Aus der Konstruktion folgt $f_{y,\varepsilon}(y) = f(y)$ und die Abschätzung.



7. Die Approximation:

- *Für jede Funktion $f \in C(K)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $f_\varepsilon \in \overline{A}$ mit*

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon.$$

Sei $f_{y,\varepsilon} \in \overline{A}$ aus Punkt 6. Weil f und $f_{y,\varepsilon}$ stetig sind und weil $f_{y,\varepsilon}(y) = f(y)$, existiert $\delta_{y,\varepsilon} > 0$ derart, dass

$$|f_{y,\varepsilon}(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in B_{\delta_{y,\varepsilon}}(y) \cap K. \tag{6.14}$$

Auch hier können wir endlich viele $\{y_k\}_{k=1}^{\kappa}$ finden und zwar derart, dass $\bigcup_{k=1}^{\kappa} B_{\delta_{y_k,\varepsilon}}(y_k) \supset K$. Wir definieren

$$f_\varepsilon(x) = \max_{1 \leq k \leq K} f_{y_k,\varepsilon}(x).$$

Für $x \in B_{\delta_{y_k,\varepsilon}}(y_k)$ folgt aus (6.14), dass

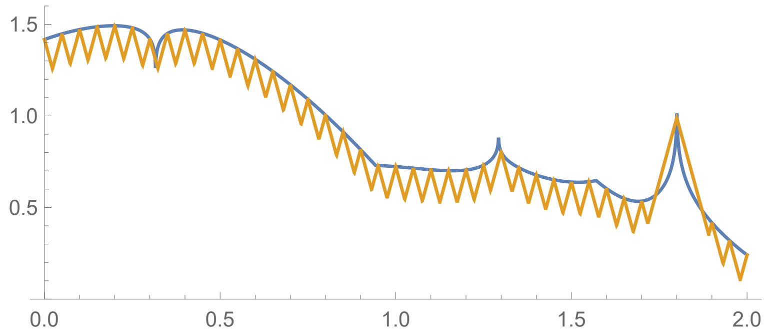
$$f_\varepsilon(x) \geq f_{y_k,\varepsilon}(x) > f(x) - \varepsilon,$$

und weil K durch diese Kugeln überdeckt wird:

$$f_\varepsilon(x) > f(x) - \varepsilon \text{ für alle } x \in K.$$

Wegen (6.13) finden wir, dass

$$f_\varepsilon(x) = \max_{1 \leq k \leq \kappa} f_{y_k,\varepsilon}(x) \leq f(x) + \varepsilon \text{ für alle } x \in K.$$



Weil es für jedes $\varepsilon > 0$ so eine Approximation $f_\varepsilon \in \overline{A}$ gibt, bedeutet das, dass $C(K) = \overline{A}$. ■

Bevor wir die bekannteste Art von Approximationen formulieren, eine kurze Erinnerung, was Polynome in mehr Dimensionen sind. Ein Polynom $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als eine Funktion der Form

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq M} c_\alpha x^\alpha \text{ mit } c_\alpha \in \mathbb{R}.$$

Hier ist $\alpha \in \mathbb{N}^n$ der Multiindex mit $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ und

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Wenn es $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gibt mit $|\alpha| = M$ und $c_\alpha \neq 0$, dann sagt man: p hat Grad M.

Korollar 6.26 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann kann man jede Funktion in $C(\overline{\Omega})$ gleichmäßig mit Polynomen approximieren.*

Beweis. Polynome sind stetig und beschränkt auf beschränkte Gebiete und deshalb bilden sie einen Teilraum von $C(\overline{\Omega})$. Das Produkt zweier Polynome ist wieder ein Polynom, also ist dieser Unterraum auch Unteralgebra.

Wenn $y, z \in \overline{\Omega}$ nicht identisch sind, dann ist mindestens eine der Koordinaten verschieden, sagen wir $y_k \neq z_k$. Das Polynom $p(x) = x_k$ trennt dann beide Stellen. Da auch die konstanten Funktionen Polynome sind, folgt das Korollar aus dem Theorem von Stone-Weierstraß. ■

. . . .

Aufgabe 6.16 *Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1\}$.*

1. *Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Punkte in K trennt.*

2. *Es gilt $K = \{(\cos\theta, \sin\theta); \theta \in [0, 2\pi]\}$. Beschreiben Sie die Polynome auf K als Funktionen von θ.*

3. *Begründen Sie, wieso jedes Polynom auf K wie folgt mit $n \in \mathbb{N}$ und $c_k, s_k \in \mathbb{R}$ zu schreiben ist:*

$$p(\theta) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{n} s_k \sin(k\theta).$$

In der letzten Aufgabe haben Sie die Bedingungen von Stone-Weierstraß gezeigt für die gleichmäßige Approximation von stetigen 2π-periodischen Funktionen.

Korollar 6.27 *Sei $f \in C\,[0, 2\pi]$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein trigonometrisches Polynom*

$$p\,(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cos\,(kx) + \sum_{k=1}^{n} s_k \sin\,(kx)$$

mit $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$. NB: $\|f\|_\infty = \max\{|f\,(x)|\,; x \in [0, 2\pi]\}$.

Kapitel 7

Baire und Banach-Steinhaus

7.1 Der Satz von Baire

Sei (V, d) ein vollständiger metrischer Raum (Fréchet-Raum) wie in Definition 2.3. Mit einer Metrik kann man schon offen und abgeschlossen definieren:

- $O \subset V$ heißt offen, wenn es für jedes $x \in O$ eine Zahl $r > 0$ gibt, derart, dass
$$B_r(x) := \{y \in V; d(x, y) < r\} \subset O.$$
- $A \subset V$ heißt abgeschlossen, wenn $V \setminus A$ offen ist.

Man definiert für $\Omega \subset V$ die größte offene Menge in Ω durch

$$\Omega^\circ := \{x \in \Omega; \exists r > 0 \text{ mit } B_r(x) \subset \Omega\},$$

und der Abschluss von Ω durch

$$\overline{\Omega} := \left\{x \in V; \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega \text{ mit } \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0\right\}.$$

Auch hier nennt man $S \subset V$ dicht in V, wenn gilt, dass $\overline{S} = V$.

Theorem 7.1 (Kategoriensatz von Baire) *Sei (V, d) ein vollständiger metrischer Raum. Wenn es abgeschlossene Mengen $S_k \subset V$ für $k \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k = V \neq \emptyset,$$

dann gilt $(S_k)^\circ \neq \emptyset$ für mindestens ein S_k.

Beweis. Nehme an $(S_k)^\circ = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wenn $A \subset V$ offen und nicht leer ist, dann ist

$$A \setminus S_k = A \cap (V \setminus S_k)$$

offen als Schnittmenge offener Mengen und außerdem nichtleer, weil es $B_\varepsilon(x) \subset A$ gibt und $B_\varepsilon(x) \not\subset S_k$, denn aus $B_\varepsilon(x) \subset S_k$ würde folgen

$$B_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x)^\circ \subset (S_k)^\circ = \emptyset.$$

Dies verwenden wir wie folgt:

Es gibt eine offene Kugel $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset V \setminus S_0$. Also gibt es auch eine offene Kugel $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset B_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus S_1$ und eine $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset$

$B_{\varepsilon_1}(x_1)\setminus S_2$ und so weiter. Dabei können wir $\varepsilon_k > 0$ jedes Mal so wählen, dass $\varepsilon_k < 2^{-k}$ und sogar derart, dass $\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)} \subset V \setminus S_0$ und

$$\overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset B_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus S_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}^+.$$

Dann wird $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und deshalb konvergent. Es gibt also $x \in V$ mit $x_k \to x$ für $k \to \infty$ und $x \in \overline{B_{\varepsilon_k}(x_k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt $x \notin S_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und also auch $x \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k = V$, ein Widerspruch. ■

In dem folgenden Theorem betrachten wir eine Familie $\mathcal{F}$ stetiger Funktionen von (V, d), ein vollständiger metrischer Raum, zu dem normierten Vektorraum $(W, \|\cdot\|)$.

. . . .

Aufgabe 7.1 *Sei $V = \{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ und sei $d(x,z) = \|x - z\|$ für $x, z \in V$.*

a. *Zeigen Sie: (V, d) ist ein Fréchet Raum.*

Definiere $f(x) = \dfrac{x_1 - y_1}{\|x-y\|^2}$ für $x \in V$ und $y \in \mathbb{R}^n$.

b. *Für welche $y \in \mathbb{R}^n$ ist $f : V \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und stetig?*

c. *Für welche $y \in V$ ist $f : V \to \mathbb{R}$ stetig fortsetzbar in y?*

7.2 Der Satz von Banach-Steinhaus

Theorem 7.2 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) *Sei (V, d) ein Fréchet-Raum und $(W, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Sei*

$$\mathcal{F} \subset C\left((V,d); (W, \|\cdot\|)\right).$$

Wenn

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(v)\| < \infty \text{ für jedes } v \in V, \tag{7.1}$$

dann existieren $v_0 \in V$ und $\varepsilon_0 > 0$ derart, dass

$$\sup_{v \in \overline{B_{\varepsilon_0}(v_0)}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(v)\| < \infty.$$

Bemerke, dass in dem letzten Theorem eine Familie $\mathcal{F}$ stetiger Abbildungen betrachtet wird, deren Funktionen f nicht unbedingt linear sein müssen.

Beweis von Theorem 7.2. Für $k \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{F}$ ist die Menge $\{v \in V; \|f(v)\| \leq k\}$ abgeschlossen, weil f stetig ist. Setzen wir

$$S_k := \bigcap\nolimits_{f \in \mathcal{F}} \{v \in V; \|f(v)\| \leq k\},$$

dann ist S_k abgeschlossen als Schnittmenge abgeschlossener Mengen. Dies folgt, weil die Vereinigung beliebiger offener Mengen wieder offen ist und weil eine Menge abgeschlossen ist genau dann, wenn das Komplement offen ist. Für diese abgeschlossenen Mengen gilt

$$\begin{aligned} S_k &= \bigcap\nolimits_{f \in \mathcal{F}} \{v \in V; \|f(v)\| \leq k\} \\ &= \{v \in V; \|f(v)\| \leq k \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\} \\ &= \left\{v \in V; \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(v)\| \leq k\right\}, \end{aligned}$$

und wegen (7.1) folgt, dass die S_k den Raum V überdecken:

$$V \subseteq \bigcup\nolimits_{k \in \mathbb{N}} S_k.$$

Der Kategoriensatz, Theorem 7.1, sagt dann, dass mindestens eine S_k eine offene Menge enthält. Es gibt also ein $k_0 \in \mathbb{N}$, $v_0 \in V$ und $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$B_\varepsilon(v_0) \subset \bigcap\nolimits_{f \in \mathcal{F}} \{v \in V; \|f(v)\| \leq k_0\}.$$

Weil die rechte Seite abgeschlossen ist, gilt sogar, dass $\overline{B_\varepsilon(v_0)}$ enthalten ist, und dies bedeutet

$$\sup_{v \in \overline{B_{\varepsilon_0}(v_0)}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f(v)\| \leq k_0,$$

was zu beweisen war. ∎

Theorem 7.3 (Banach-Steinhaus) *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und $(W, \|\cdot\|_W)$ ein normierter Vektorraum. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von beschränkte lineare operatoren:*

$$\mathcal{F} \subset BL((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W)).$$

Wenn

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \|A(v)\|_W < \infty \text{ für jedes } v \in V, \tag{7.2}$$

dann gilt

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \|A\|_{V \to W} < \infty. \tag{7.3}$$

Beweis. Jeder Banachraum ist auch Fréchet-Raum und beschränkte lineare Operatoren sind stetig. Weil die Bedingung in (7.2) übereinstimmt mit (7.1), können wir folgern, dass $v_0 \in V$ und $\varepsilon_0 > 0$ existieren derart, dass

$$\sup_{v \in \overline{B_{\varepsilon_0}(v_0)}} \sup_{A \in \mathcal{F}} \|A(v)\|_W < \infty.$$

Es gibt also $M \in \mathbb{R}$ mit

$$\|A(v)\|_W \leq M \text{ für alle } v \in \overline{B_{\varepsilon_0}(v_0)} \text{ und } A \in \mathcal{F}.$$

Also gilt auch für alle $\tilde{v} \in V$ mit $\|\tilde{v}\|_V = 1$, dass

$$\begin{aligned}\|A(\tilde{v})\|_W &= \varepsilon_0^{-1} \|A(v_0 + \varepsilon_0 \tilde{v}) - A(v_0)\|_W \\ &\leq \varepsilon_0^{-1} \left(\|A(v_0 + \varepsilon_0 \tilde{v})\|_W + \|A(v_0)\|_W \right) \leq 2M/\varepsilon_0\end{aligned}$$

und dies liefert $\|A\|_{V \to W} \leq 2M/\varepsilon_0$ für alle $A \in \mathcal{F}$. ■

Als Alternative kann man sagen, dass eine Familie $\mathcal{F} \subset BL((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W))$ entweder gleichmäßig beschränkt ist, also (7.3) erfüllt, oder derart ist, dass eine dichte Teilmenge S von V existiert mit

$$\sup_{\Lambda \in \mathcal{F}} \|\Lambda v\| = \infty \text{ für alle } v \in S.$$

Aufgabe 7.2 *Beweisen Sie diese letzte alternative Fassung von Banach-Steinhaus.*

Lemma 7.4 *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine Folge mit $v_n \rightharpoonup v$ in V für $n \to \infty$. Dann existiert $M \in \mathbb{R}$ mit $\|v_n\|_V \leq M$ und*

$$\|v\|_V \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_V . \tag{7.4}$$

Beweis. Betrachte $\beta_n \in V^{**}$ definiert durch $\beta_n(\varphi) = \varphi(v_n)$ für $\varphi \in V^*$. Für jedes $\varphi \in V^*$ gilt $\varphi(v_n) \to \varphi(v)$ und deshalb folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n(\varphi)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(v_n)| < \infty.$$

Mit Banach-Steinhaus findet man

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\beta_n\|_{V^{**}} < \infty.$$

Wegen Lemma 4.8 gilt $\|\beta_n\|_{V^{**}} = \|v_n\|_V$. Weil $|\phi(v_n)| \to |\phi(v)|$ und

$$|\phi(v_n)| \leq \|\phi\|_{V^*} \|v_n\|_V ,$$

folgt

$$|\phi(v)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\phi\|_{V^*} \|v_n\|_V .$$

Wie vorher betrachte $\beta \in V^{**}$ definiert durch $\beta(\phi) = \phi(v)$. Es folgt, wiederum mit Lemma 4.8, dass

$$\|v\|_V = \|\beta\|_{V^{**}} = \sup\left\{\frac{|\beta(\phi)|}{\|\phi\|_{V^*}}; \phi \in V^* \setminus \{0\}\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{|\phi(v)|}{\|\phi\|_{V^*}}; \phi \in V^* \setminus \{0\}\right\} \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_V .$$

■

7.3 Offene Abbildungen

Definition 7.5 *Seien (V, d_V) und (W, d_W) metrische Räume. Man nennt $f : V \to W$ eine **offene Abbildung**, wenn folgendes gilt:*

$$U \subset V \text{ ist offen} \implies f(U) \subset W \text{ ist offen.}$$

. . . .

Aufgabe 7.3 *Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung Λ zwischen normierten Vektorräumen $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ offen ist, genau dann, wenn $\delta > 0$ existiert derart, dass*

$$\{w \in W; \|w\|_w < \delta\} \subset \Lambda(\{v \in V; \|v\|_v < 1\}).$$

Aufgabe 7.4 *Wir betrachten Abbildungen von $[0,1]$ nach $[0,1]$ mit der Standarddistanz.*

1. *Geben Sie eine derartige Abbildung an, die offen ist.*
2. *Geben Sie eine derartige Abbildung an, die nicht offen ist.*

Theorem 7.6 (Satz von der offenen Abbildung) *Seien die Banachräume $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ gegeben. Für jede Abbildung $\Lambda \in (BL(V;W), \|\cdot\|_{V\to W})$ gilt folgendes:*

$$\Lambda \text{ ist offen} \iff \Lambda \text{ ist surjektiv.}$$

Beweis. Um die Kugeln in V und in W zu unterscheiden, hängen wir einen Index an:

$$B_r^{\mathrm{V}}(v_0) := \{v \in V; \|v - v_0\|_V < r\},$$
$$B_r^{\mathrm{W}}(w_0) := \{w \in W; \|w - w_0\|_W < r\}.$$

$\Rightarrow$) Für $B_1^{\mathrm{V}}(0)$ gilt, dass $\Lambda(B_1^{\mathrm{V}}(0))$ offen ist. Wegen der Linearität gilt $0 \in \Lambda(B_1^{\mathrm{V}}(0))$ und es gibt also $\delta > 0$ mit

$$B_\delta^{\mathrm{W}}(0) \subset \Lambda(B_1^{\mathrm{V}}(0)).$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_{n\delta}^{\mathrm{W}}(0) &\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \Lambda(B_n^{\mathrm{V}}(0)) \\ &= \Lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_n^{\mathrm{V}}(0)\right) = \Lambda(V) \end{aligned}$$

und dies bedeutet Surjektivität.

$\Longleftarrow$) Weil Λ surjektiv ist, gilt

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \overline{\Lambda(B_n^{\mathrm{V}}(0))}.$$

Mit dem Satz von Baire, Theorem 7.1, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}^+$ derart, dass $\overline{\Lambda\left(B_{n_0}^{\mathrm{V}}(0)\right)}$ eine offene Kugel enthält: Es gibt $w_0 \in W$ und $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$B_{\varepsilon_0}^{\mathrm{W}}(w_0) \subset \overline{\Lambda\left(B_{n_0}^{\mathrm{V}}(0)\right)}.$$

Dann gibt es $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_{n_0}^{\mathrm{V}}(0)$ mit $\Lambda(v_k) \to w_0$ für $k \to \infty$. Also existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\Lambda(v_{k_0}) \in B_{\varepsilon_0/2}^{\mathrm{W}}(w_0)$ und dann findet man durch die Linearität, dass

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon_0/2}^{\mathrm{W}}(0) \ &\subset \ B_{\varepsilon_0}^{\mathrm{W}}(w_0 - \Lambda(v_{k_0})) \\ &\subset \ \overline{\Lambda\left(B_{n_0}^{\mathrm{V}}(0) - v_{k_0}\right)} \ \subset \ \overline{\Lambda\left(B_{2n_0}^{\mathrm{V}}(0)\right)}. \end{aligned}$$

Wir wären fertig, wenn dieser Abschlussstrich da nicht wäre. Das kriegen wir auch noch hin.

Sei $w \in B_{\varepsilon_0/2}^{\mathrm{W}}(0)$. Dann existiert $v \in B_{2n_0}^{\mathrm{V}}(0)$ mit $\|w - \Lambda v\|_W < \frac{1}{4}\varepsilon_0$. Daher gilt

$$2(w - \Lambda v) \in B_{\varepsilon_0/2}^{\mathrm{W}}(0).$$

Induktiv kann man so $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_{2n_0}^{\mathrm{V}}(0)$ und $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_{\varepsilon_0/2}^{\mathrm{W}}(0)$ finden mit $w_0 = w$ und

$$w_{k+1} = 2(w_k - \Lambda v_k) \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Definieren wir $t_m \in V$ durch

$$t_m = \sum_{k=0}^{m} 2^{-k} v_k,$$

dann gilt $\|t_m - t_n\| \leq 2^{-\min(m,n)} 2n_0$ und folgt, dass $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Banachraum V ist. Dann gibt es

$$t_\infty \in B_{4n_0}^{\mathrm{V}}(0)$$

mit $t_m \to t_\infty$ für $m \to \infty$. Für $s_m = \Lambda t_m$ gilt

$$s_m = \sum_{k=0}^{m} 2^{-k}\left(w_k - \frac{1}{2}w_{k+1}\right) = w_0 - 2^{-m-1} w_{m+1},$$

und $s_m \to w_0 = w$ für $m \to \infty$.

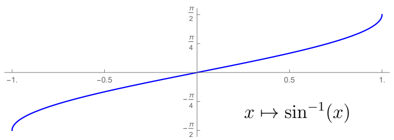
Wir finden so, dass

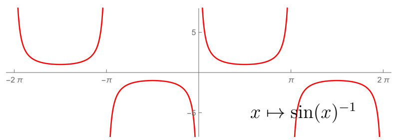
$$w = \lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} \Lambda t_m = \Lambda t_\infty.$$

Dann hat es für jedes $w \in B_{\varepsilon_0/2}^{\mathrm{W}}(0)$ ein $v \in B_{4n_0}^{\mathrm{V}}(0)$ mit $w = \Lambda v$. ■

Für eine bijektive Abbildung $f : V \to W$ existiert eine inverse Abbildung, die man notiert durch f^{invers} oder f^{-1}. Die letzte Notation kann zu Verwirrung führen bei zum Beispiel $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, definiert durch $f(x) = \sin(x)$, denn

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x) \text{ und } f(x)^{-1} = \frac{1}{\sin(x)}.$$





Beispiel 7.7 *Für $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ betrachten wir die lineare Abbildung $A : \ell^2 \to \ell^2$, definiert durch $(Ax)_1 = x_1$ und $(Ax)_k = x_k - x_{k-1}$ für $k \geq 2$, also*

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots).$$

Weil $\|Ax\| \leq 2\|x\|$ gilt, ist A auch stetig. Löst man $Ax = y$, dann folgt

$$x_k = \sum_{m=1}^{k} y_k,$$

das heißt $x = By$ mit

$$B(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots).$$

Dieser Operator B ist wohldefiniert auf $A(\ell^2)$ aber nicht auf ℓ^2. Betrachten Sie Bv für $v_k = 1/k$.
Dies bedeutet, dass $A : \ell^2 \to A(\ell^2)$ invertierbar ist, und $A : \ell^2 \to \ell^2$ nicht.

Korollar 7.8 (Satz von der inversen Abbildung) *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume. Dann gilt für jeden $\Lambda \in (BL(V;W), \|\cdot\|_{V\to W})$ folgendes:*

$$\Lambda \text{ ist bijektiv} \iff \Lambda^{-1} \in (BL(W;V), \|\cdot\|_{W\to V}).$$

Beweis. Weil Λ linear und bijektiv ist, ist Λ offen. Das heißt, dass es $\delta > 0$ gibt mit $B_\delta(0) \subset \Lambda(B_1(0))$, wie wir in Aufgabe 7.3 gesehen haben und dies liefert $\Lambda^{-1}(B_\delta(0)) \subset B_1(0)$ und $\|\Lambda^{-1}\| \leq 1/\delta$. ∎

Korollar 7.9 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume und sei $\Lambda : V \to W$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

- $\Lambda \in (BL(V;W), \|\cdot\|_{V\to W})$;
- $\{(v, \Lambda v); v \in V\}$ *ist abgeschlossen in* $(V \times W, \|\cdot\|)$ *mit* $\|(v, w)\| = \|v\|_V + \|w\|_W$.

Wenn $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume sind, dann ist auch $(V \times W, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Die Menge

$$\{(v, \Lambda v); v \in V\} \subset V \times W$$

nennt man **den Graphen** zu der Abbildung $\Lambda : V \to W$.

> *Dieser Graph ist abgeschlossen, wenn für alle konvergente Folgen $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit*
>
> $$v_n \to v \text{ und } \Lambda v_n \to w \text{ für } n \to \infty$$
>
> *gilt, dass $\Lambda v = w$.*

Man betrachtet hier nicht alle Folgen $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die konvergieren, sondern nur die Folgen, bei denen gleichzeitig auch $\{\Lambda v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweis. $\Longrightarrow$) Wenn $v_n \to v$, dann folgt aus der Stetigkeit, dass $\Lambda v_n \to \Lambda v$ und dann auch $(v_n, \Lambda v_n) \to (v, \Lambda v)$.

$\Longleftarrow$) $U := \{(v, \Lambda v) ; v \in V\}$ ist ein Teilraum von $V \times W$. Die Abbildung $P_V : V \times W \to V$, definiert durch $P_V(v, w) = w$ ist linear und stetig, und dies ebenfalls auf dem Teilraum U. Als Abbildung $P_V : U \to V$ ist P_V sogar invertierbar. Durch den Satz von der inversen Abbildung gilt

$$P_V^{-1} \in BL\left((V, \|\cdot\|_V) ; (U, \|\cdot\|)\right).$$

Weil auch $P_W : U \subset V \times W \to W$ linear und stetig ist, findet man für $v_n \to v$, dass

$$\Lambda v_n = P_W \circ P_V^{-1}(v_n) \to P_W \circ P_V^{-1}(v) = \Lambda v.$$

Das heißt Λ ist stetig. ∎

....

Aufgabe 7.5 *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banach-Räume. Sei $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset BL\left((V, \|\cdot\|_V) ; (W, \|\cdot\|_W)\right)$ derart, dass für alle $v \in V$*

$$\Lambda(v) := \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(v)$$

wohldefiniert ist.

1. *Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n\|$ existiert.*
2. *Zeigen Sie, dass $\Lambda \in BL\left((V, \|\cdot\|_V) ; (W, \|\cdot\|_W)\right)$.*

Betrachten Sie $V = W = \ell^2$ mit der Standardnorm und

$$\Lambda_n : \ell^2 \to \ell^2$$

definiert durch

$$(\Lambda_n x)_k = \begin{cases} x_k & \text{für } k \leq n, \\ 0 & \text{für } k > n. \end{cases}$$

3. *Zeigen Sie, dass $\Lambda(v) := \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(v) = v$.*
4. *Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \|\Lambda_n\| = \|\Lambda\| = 1$.*
5. *Berechnen Sie $\|\Lambda - \Lambda_n\|$.*

7.4 Funktionalkalkül

Für die Menge der beschränkten linearen Operatoren von $(V, \|\cdot\|)$ nach $(V, \|\cdot\|)$ schreiben wir $BL(V, \|\cdot\|)$.

Der Identitätsoperator I, definiert durch $Iv = v$, liegt in $BL(V, \|\cdot\|)$.

Bemerkung 7.9.1 *Wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, dann ist $BL(V, \|\cdot\|)$ eine Banach-Algebra, wenn man das Produkt wie folgt definiert:*

$$(\Lambda_1 \times \Lambda_2)(v) = \Lambda_1(\Lambda_2(v)).$$

Dieses Produkt ist nicht kommutativ.

Definition 7.10 *Für $\Lambda \in BL(V, \|\cdot\|)$ definiert man den Spektralradius $\rho(\Lambda) \in [0, \infty)$ durch*

$$\rho(\Lambda) = \limsup_{n \to \infty} \|\Lambda^n\|^{1/n}.$$

Lemma 7.11 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $\Lambda \in BL(V, \|\cdot\|)$ mit $\rho(\Lambda) < 1$. Dann ist $I - \Lambda$ invertierbar und*

$$(I - \Lambda)^{-1} \in BL((V, \|\cdot\|); (V, \|\cdot\|)). \tag{7.5}$$

Außerdem gilt

$$(I - \Lambda)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k. \tag{7.6}$$

Man nennt die rechte Seite von (7.6) die **Neumann-Reihe** für $(I - \Lambda)^{-1}$.

Beweis. Setze $S_m := \sum_{k=0}^{m} \Lambda^k$ und sei $m_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $m \geq m_0$ gilt, dass

$$\|\Lambda^m\|^{1/m} \leq \theta < 1.$$

Für $\ell \geq m \geq m_0$ gilt:

$$\|S_\ell - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{\ell} \Lambda^k\right\|$$
$$\leq \sum_{k=m+1}^{\ell} \left\|\Lambda^k\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{\ell} \theta^k \leq \frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}$$

und diese Abschätzung zeigt, dass $\{S_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset BL(V, \|\cdot\|)$ eine Cauchy-Folge ist. Weil $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, ist auch $BL(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und die Folge konvergiert: es gibt $S_\infty \in BL(V, \|\cdot\|)$ mit

$$\lim_{m \to \infty} \|S_\infty - S_m\| = 0.$$

Dann gilt, dass

$$(I - \Lambda) S_\infty = \lim_{m \to \infty} (I - \Lambda) S_m = \lim_{m \to \infty} \left(I - \Lambda^{m+1}\right) = I$$

und ebenfalls

$$S_\infty (I - \Lambda) = \lim_{m \to \infty} S_m (I - \Lambda) = \lim_{m \to \infty} \left(I - \Lambda^{m+1}\right) = I.$$

Also gilt $S_\infty = (I - \Lambda)^{-1}$, das heißt, die Gleichung in (7.6) stimmt. Mit Korollar 7.8 folgt (7.5). ■

. . . .

Aufgabe 7.6 *Beweisen Sie die Aussagen in Bemerkung 7.9.1.*

Aufgabe 7.7 *Beweisen Sie, dass*

$$\rho(\Lambda) \leq \|\Lambda\| \text{ für } \Lambda \in BL(V, \|\cdot\|),$$

und geben Sie ein Beispiel an mit $\rho(\Lambda) < \|\Lambda\|$.
Schaffen Sie auch ein Beispiel mit $0 < \rho(\Lambda) < \|\Lambda\|$?

Aufgabe 7.8 *Wir betrachten $L \in BL(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, definiert durch*

$$(Lx)_1 = x_1 \text{ und } (Lx)_k = x_k + 2^{3-k} x_{k-1} \text{ für } k \geq 2.$$

Also

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(x_1, x_2 + 2x_1, x_3 + x_2, x_4 + \tfrac{1}{2}x_3, \dots\right).$$

1. *Zeigen Sie, dass L eine stetige Inverse hat.*
2. *Berechnen Sie $(L^{-1}x)_k$ für $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Lemma 7.12 *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $\Lambda \in BL(V, \|\cdot\|)$ mit $\rho(\Lambda) < R$. Dann ist*

$$f(\Lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Lambda^n \in BL(V, \|\cdot\|)$$

wohldefiniert.

Beweis. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 7.11 setzen wir $S_m := \sum_{k=0}^{m} a_k \Lambda^k$ und nehmen $m_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $m \geq m_0$ gilt:

$$\|\Lambda^m\|^{1/m} \leq \theta < R.$$

Für $\ell \geq m \geq m_0$ folgt dann:

$$\begin{aligned} \|S_\ell - S_m\| &= \left\|\sum\nolimits_{k=m+1}^{\ell} a_k \Lambda^k\right\| \\ &\leq \sum\nolimits_{k=m+1}^{\ell} \left\|a_n \Lambda^k\right\| \leq \sum\nolimits_{k=m+1}^{\infty} |a_n| \, \theta^k. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Weil $0 \leq \theta < R$ und die Potenzreihe absolut konvergiert innerhalb des Konvergenzradius R, geht die rechte Seite in (7.7) nach 0 für $m \to \infty$. Also ist $\{S_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset BL(V, \|\cdot\|)$ eine Cauchy-Folge. Weil $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, ist auch $BL(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und diese Folge konvergiert: es gibt $f(\Lambda) \in BL(V, \|\cdot\|)$ mit

$$\lim_{m \to \infty} \|f(\Lambda) - S_m\| = 0,$$

und das war zu beweisen. ■

. . . .

Beispiel 7.13 *Sei $\Lambda \in BL(V, \|\cdot\|)$ und $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann ist*

$$\log(I - \Lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Lambda^k = -\Lambda - \tfrac{1}{2}\Lambda^2 - \tfrac{1}{3}\Lambda^3 - \dots$$

wohldefiniert in $BL(V, \|\cdot\|)$, wenn $\rho(\Lambda) < 1$.

. . . .

Aufgabe 7.9 *Die Differentialgleichung $f'(t) = a\ f(t)$, mit $f(0) = f_0$ gegeben, wird gelöst durch $f(t) = e^{at} f_0$.*
Sei nun $\Lambda \in BL(V, \|\cdot\|)$ mit $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

1. *Zeigen Sie, dass $v(t) = e^{\Lambda t} v_0$ für $v_0 \in V$ mit*

$$e^{\Lambda t} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Lambda^k$$

eine wohldefinierte Funktion von $[0, \infty)$ nach V ist, die das folgende Anfangswertproblem löst:

$$v'(t) = \Lambda v(t) \text{ mit } v(0) = v_0.$$

NB Für $v:\mathbb{R}\to V$ definiert man v', wenn der Limes $v'(t):=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$ in t existiert in V.

2. *Sei $(V,\|\cdot\|)=(\ell^2,\|\cdot\|_2)$. Finden Sie, wenn möglich, Lösungen $x:[0,\infty)\to\ell^2$ von $x'(t)=A\,x(t)$, wenn A und $x(0)$ gegeben sind durch*

$$i)\quad \begin{cases} (Ax)_k=\frac{-1}{k}x_k & \text{für } k\in\mathbb{N}^+,\\ x_k(0)=\frac{1}{k} & \text{für } k\in\mathbb{N}^+,\end{cases}$$

$$ii)\quad \begin{cases} (Ax)_1=-x_1 & \\ (Ax)_k=\frac{k-1}{k}x_{k-1}-\frac{1}{k}x_k & \text{für } k\geq 2,\\ x_1(0)=1 \text{ und } x_k(0)=0 & \text{für } k\geq 2,\end{cases}$$

Aufgabe 7.10 *Wir wollen versuchen, wie in der letzten Aufgabe, Lösungen x mit $x(t)\in\ell^2$ von $x'(t)=A\,x(t)$ zu finden mit $x_k(0)=2^{-k}$ für $k\in\mathbb{N}^+$ und*

$$iii)\quad (Ax)_k=-kx_k \qquad \text{für } k\in\mathbb{N}^+,$$

$$iv)\quad (Ax)_k=kx_k \qquad \text{für } k\in\mathbb{N}^+.$$

Bemerke, dass A zwar linear ist, aber nicht in $BL(\ell^2,\|\cdot\|_2)$ liegt. Geben Sie auch die maximalen Existenzintervalle der Lösungen an.

7.5 Adjungierte Operatoren

Seien $(V,\|\cdot\|_V)$ und $(W,\|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Zu beiden Räumen gibt es die Dualräume $(V^*,\|\cdot\|_{V^*})$ und $(W^*,\|\cdot\|_{W^*})$ der stetigen linearen Abbildungen von V beziehungsweise W nach $\mathbb{R}$.

Definition 7.14 *Für eine lineare Abbildung $\Lambda:V\to W$ kann man eine lineare Abbildung*

$$\Lambda^*:W^*\to V^*$$

definieren mittels

$$\Lambda^* w^* := w^* \circ \Lambda \quad \textit{für } w^* \in W^*.$$

*Man nennt Λ^* den zu Λ **adjungierten Operator**.*

Diese Definition ausschreiben liefert:

$$\left(\Lambda^* w^*\right)(v) := w^*\left(\Lambda v\right) \quad \text{für } w^* \in W^* \text{ und } v \in V.$$

Für $v \in V$ folgt $\Lambda v \in W$ und $w^*\left(\Lambda v\right) \in \mathbb{R}$ ist wohldefiniert.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Lambda"] & W \\ V^* & W^* \arrow[l, "\Lambda^*"'] \end{tikzcd}$$

Wenn $V = W$ ein Hilbertraum ist, kann man $V^* = W^*$ mit V identifizieren durch den Darstellungssatz von Riesz. In dem Fall gilt $\Lambda, \Lambda^* : V \to V$. Die folgende Definition ist wichtig bei vielen Anwendungen:

Definition 7.15 *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Wenn $\Lambda : V \to V$ eine lineare Abbildung ist und $\Lambda = \Lambda^*$, dann nennt man Λ selbstadjungiert.*

Bei Hilberträume und $\Lambda : V \to W$ kann man die Schreibweise des inneren Produkts auf V verwenden:

$$\langle \Lambda^* w, v\rangle_V := \langle w, \Lambda v\rangle_W .$$

Auch wenn man nicht mit Hilberträume arbeitet, verwendet man oft für die Dualität diese Schreibweise mit Klammern. Man schreibt in dem Fall

$$\langle w, v\rangle_{V^* \times V} := w\left(v\right),$$

muss dann jedoch beachten, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*\times V}$ bloß ein bilinearer Operator ist von $V^* \times V$ zu $\mathbb{R}$.

Lemma 7.16 *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume und sei*

$$\Lambda \in BL\left(\left(V, \|\cdot\|_V\right), \left(W, \|\cdot\|_W\right)\right).$$

Dann gilt

$$\Lambda^* \in BL\left(\left(W^*, \|\cdot\|_{W^*}\right), \left(V^*, \|\cdot\|_{V^*}\right)\right)$$

und sogar

$$\|\Lambda\|_{V\to W} = \|\Lambda^*\|_{W^*\to V^*}.$$

Beweis. Aus der Definition der Norm folgt

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\frac{\|\Lambda^* w^*\|_{V^*}}{\|w^*\|_{W^*}}; w^* \in W^* \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\left|\Lambda^* w^*\left(v\right)\right|}{\|v\|_V \|w^*\|_{W^*}}; w^* \in W^* \setminus \{0\}, v \in V \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\left|w^*\left(\Lambda v\right)\right|}{\|v\|_V \|w^*\|_{W^*}}; w^* \in W^* \setminus \{0\}, v \in V \setminus \{0\}\right\} = (7.8) \end{aligned}$$

Weil $\left|w^*\left(\Lambda v\right)\right| \leq \|w^*\|_{W^*} \|\Lambda v\|_W$ finden wir, dass

$$(7.8) \leq \sup\left\{\frac{\|\Lambda v\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\}\right\} = \|\Lambda\|_{V\to W}.$$

Also gilt $\Lambda^* \in BL\left(\left(W^*, \|\cdot\|_{W^*}\right), \left(V^*, \|\cdot\|_{V^*}\right)\right)$ und

$$\|\Lambda^*\|_{W^*\to V^*} \leq \|\Lambda\|_{V\to W}$$

Für die Gleichheit in der Norm brauchen wir Hahn-Banach. Zuerst kann man bemerken, dass wenn $\Lambda = 0$, dann gilt $\|\Lambda^*\|_{W^*\to V^*} = \|\Lambda\|_{V\to W} = 0$. Also dürfen wir annehmen, dass $\Lambda \neq 0$ und also auch, dass $v \in V$ existiert mit $\Lambda v \neq 0$. Sei v derart und definiere $f_v : \ S := \operatorname{Span}(\Lambda v) \to \mathbb{R}$ durch

$$f_v(t\Lambda v) = t\|\Lambda v\|_W .$$

Man findet

$$\|f_v\|_{S\to\mathbb{R}} = \sup_{t\neq 0} \frac{|f_v(t\Lambda v)|}{\|t\Lambda v\|} = \frac{|t\|\Lambda v\||}{\|t\Lambda v\|} = 1,$$

und jede solche stetige lineare Funktion f_v kann man mit Theorem 3.10 erweitern zu $w_v^* \in W^*$ mit $\|w_v^*\|_{W^*} = 1$. Außerdem gilt $w_v^*(\Lambda v) = f_v(\Lambda v) = \|\Lambda v\|_W$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}(7.8) \geq \sup\left\{\frac{|w_v^*(\Lambda v)|}{\|v\|_V \|w_v^*\|_{W^*}}; v \in V \text{ mit } \Lambda v \neq 0\right\} \\ = \sup\left\{\frac{\|\Lambda v\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \text{ mit } \Lambda v \neq 0\right\} \\ = \sup\left\{\frac{\|\Lambda v\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \text{ mit } v \neq 0\right\} = \|\Lambda\|_{V\to W} .\end{aligned}$$

Durch (7.5) und (7.5) folgt die Gleichung. ∎

Die Orthogonalität, die man in Hilberträume hat, lässt sich erweitern zu Banachräume, jedoch nicht so direkt, wie man vielleicht hofft.

Definition 7.17 *Seien $(V, \|\cdot\|)$ einen Banachraum.*

- *Sei $S \subset V$ und $f \in V^*$. Mann sagt, dass $f \in S^\perp$, wenn $f(v) = 0$ für alle $v \in S$.*
- *Sei $v \in V$ und $T \subset V^*$. Mann sagt, dass $v \in T^\perp$, wenn $f(v) = 0$ für alle $f \in T$.*

Bemerkung 7.17.1 *In einem Hilbertraum kann man V und V^* mit Riesz identifizieren und $f(v) = 0$ für $v \in V$ und $f \in V^*$ auffassen als $\langle f, v\rangle = 0$. Dann wird $f \in S^\perp$ für $S \subset V$ zu*

$$\langle f, v\rangle \text{ für alle } v \in S,$$

und das ist genau die übliche Definition.

Für Teilmengen $F \subset V^*$ oder $U \subset V$ werden die orthogonalen Mengen dann wie folgt festgelegt:

- Für $U \subset V$ definiert man $U^\perp \subset V^*$ durch
$$U^\perp := \{\psi \in V^*; \ \psi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$
- Für $F \subset V^*$ definiert man $F^\perp \subset V$ durch
$$F^\perp := \{v \in V; \ f(v) = 0 \text{ für alle } f \in F\}.$$

Bemerkung 7.17.2 *Der genaue Leser sieht, dass $F^\perp$ für $F \subset V^*$ eigentlich nur wohl-definiert ist, wenn der Banachraum reflexiv ist. Wenn das nicht der Fall ist, wäre $F^\perp$ nach dem ersten Punkt eine Teilmenge von V^{**} und nach dem zweiten Punkt eine Teilmenge von V. Man erinnere sich, dass bei nicht-reflexiven Banachräume gilt: $V \subsetneqq V^{**}$.*

Lemma 7.18 *Seien* $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ *normierte Vektorräume und sei*

$$\Lambda \in BL\left((V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)\right).$$

Dann gilt:

$$\operatorname{Ker}(\Lambda) = \operatorname{Range}(\Lambda^*)^\perp \text{ und } \operatorname{Ker}(\Lambda^*) = \operatorname{Range}(\Lambda)^\perp.$$

Bemerke, dass $\operatorname{Range}(\Lambda^*)$ ein Teilraum ist von V^* und $\operatorname{Ker}(\Lambda)$ ein Teilraum von V. Ähnlich ist $\operatorname{Range}(\Lambda)$ ein Teilraum von W und $\operatorname{Ker}(\Lambda^*)$ von W^*.

Beweis von Lemma 7.18. Für die erste Behauptung:

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Ker}(\Lambda) &\Leftrightarrow \Lambda v = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \psi \in W^* : \psi(\Lambda v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \psi \in W^* : (\Lambda^* \psi)(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \phi \in \Lambda^* W^* : \phi(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in \operatorname{Range}(\Lambda^*)^\perp. \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung zeigt man ähnlich. ■

. . . .

Aufgabe 7.11 *Wir betrachten* $(L^2(0, 2\pi), \|\cdot\|_2)$. *Dieser Vektorraum ist ein Hilbertraum mit innerem Produkt*

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} u(x)\, v(x)\, dx.$$

Sei $K \in C\left([0, 2\pi]^2; \mathbb{R}\right)$.

1. *Zeigen Sie, dass der Operator* $\mathcal{K}$, *für* $u \in L^2(0, 2\pi)$ *definiert durch*

$$(\mathcal{K}u)(x) = \int_0^{2\pi} K(x, y)\, u(y)\, dy$$

in $BL(L^2(0, 2\pi), \|\cdot\|_2)$ *liegt.*

2. *Geben Sie eine Bedingung an* K *an, sodass* $\mathcal{K}$ *selbstadjungiert ist und beweisen Sie dies.*

Kapitel 8

Kompakte Operatoren

8.1 Definition

Kompakte Mengen sind festgelegt worden in Definition 2.18.

Definition 8.1 *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume und sei $K \in BL\left((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W)\right)$. Man nennt K einen **kompakten Operator**, wenn jede beschränkte Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset V$ eine Teilfolge $\{v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ hat derart, dass $\{Kv_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^+} \subset W$ konvergiert.*

Diese Definition ist äquivalent zu:

K ist derart, dass für alle $U \subset V$ gilt:

$$U \text{ beschränkt in } V \implies \overline{K(U)} \text{ kompakt in } W.$$

Aufgabe 8.1 *Zeigen Sie, dass wenn*

$$K, L \in BL\left((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W)\right)$$

kompakte Operatoren sind, auch $K + L$ kompakt ist.

Beispiel 8.2 *Wir betrachten $\Lambda \in BL\left(\ell^2, \|\cdot\|_2\right)$ definiert durch*

$$(\Lambda x)_k = 2^{-k} x_k.$$

Diese Abbildung ist kompakt. Das sieht man wie folgt: Sei $\left\{x^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset \ell^2$ eine durch M beschränkte Folge. Dann ist *auch für jedes k die Folge*

$$\left\{x_k^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset \mathbb{R} \text{ beschränkt durch } M.$$

Mit einem Diagonalargument wählen wir erst eine Teilfolge derart, dass

$$\left\{x_1^{(n_1,m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}^+} \text{ in } \mathbb{R} \text{ konvergiert nach } x_1^\infty,$$

dann eine Teilteilfolge derart, dass

$$\left\{x_2^{(n_2,m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}^+} \text{ in } \mathbb{R} \text{ konvergiert nach } x_2^\infty,$$

und so weiter. Als endgültige Teilfolge nehmen wir $\left\{x^{(n_m,m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}^+} \subset \ell^2$. *Diese Folge konvergiert dann punktweise nach* x^∞ *aber im Allgemeinen nicht in* ℓ^2 *nach* x^∞.

Definieren wir y^∞ *durch* $y_k^\infty = 2^{-k}x_k^\infty$, *dann gilt* $y^\infty \in \ell^2$ *und außerdem konvergiert die Folge* $\left\{\Lambda x^{(n_m,m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}^+}$ *nach* y^∞.

Das sieht man wie folgt: Für $\varepsilon > 0$ *bestimmen wir*

1. $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *derart, dass* $2^{-K_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, *und*

2. $m_{K_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ *derart, dass für* $m > m_{K_\varepsilon}$ *gilt*

$$\max_{1\leq k\leq K_\varepsilon} \left|x_k^{(n_m,m)} - x_k^\infty\right| < \varepsilon.$$

Dann folgt für $m > m_{K_\varepsilon}$, *dass*

$$\begin{aligned}
\left\|\Lambda x^{(n_m,m)} - y^\infty\right\|_2^2 &= \sum_{k=1}^\infty \left|2^{-k}x_k^{(n_m,m)} - y_k^\infty\right|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} 4^{-k}\left|x_k^{(n_m,m)} - x_k^\infty\right| + \sum_{k=K_\varepsilon+1}^{\infty} 4^{-k}\left|x_k^{(n_m,m)} - x_k^\infty\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{K_\varepsilon} 4^{-k}\varepsilon^2 + \sum_{k=K_\varepsilon+1}^{\infty} 4^{-k}(2M)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}\varepsilon^2 + \left(2^{-K_\varepsilon}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k}(2M)^2 \\
&\leq \tfrac{1}{3}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2 (2M)^2 < \varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Wir haben hier verwendet, dass

$$\sum_{k=1}^\infty 4^{-k} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

Weil es für jedes $\varepsilon > 0$ *ein* $m_{K_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ *gibt derart, dass (8.1) gilt für* $m > m_{K_\varepsilon}$, *folgt* $\Lambda x^{(n_m,m)} \to y^\infty$ *in* ℓ^2.

. . . .

Aufgabe 8.2 *Wir betrachten die Folge* $\left\{x^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset \ell^2$, *definiert durch*

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= (1,1,0,0,0,0,0,\dots) \\
x^{(2)} &= (1,0,1,0,0,0,0,\dots) \\
x^{(3)} &= (0,1,1,0,0,0,0,\dots) \\
x^{(4)} &= (1,0,0,1,0,0,0,\dots) \\
x^{(5)} &= (0,1,0,1,0,0,0,\dots) \\
x^{(6)} &= (0,0,1,1,0,0,0,\dots) \\
x^{(7)} &= (1,0,0,0,1,0,0,\dots) \\
x^{(8)} &= (0,1,0,0,1,0,0,\dots) \\
x^{(9)} &= (0,0,1,0,1,0,0,\dots) \\
x^{(10)} &= (0,0,0,1,1,0,0,\dots) \\
& \quad \textit{und so weiter.}
\end{aligned}$$

Von $x^{(n)}$ *zu* $x^{(n+1)}$ *geht es, indem das meist linke Paar* "$1,0$" *sich ändert in* "$0,1$" *und eine eventuelle* "1" *vorher wieder vorne anfängt.*

Welche x^* *kommen in Frage als punktweiser Limes einer Teilfolge?*

Aufgabe 8.3 *Wir setzen die letzte Aufgabe fort.*

1. *Zeigen Sie, dass die Folge keine in* ℓ^2 *konvergente Teilfolge besitzt.*
2. *Für welche* x^* *gibt es eine Teilfolge mit* $x^{(n_k)} \rightharpoonup x^*$ *in* ℓ^2*?*
3. *Sei* $\Lambda : \ell^2 \to \ell^2$ *definiert durch* $(\Lambda x)_k = \frac{1}{k} x_k$. *Für welche* x^* *gibt es eine Teilfolge mit* $\Lambda x^{(n_k)} \to \Lambda x^*$ *in* ℓ^2*?*
4. *Ist* Λ *ein kompakter Operator?*

Beispiel 8.3 *Wenn Sie die letzte Aufgabe richtig gemacht haben, dann haben Sie eine Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ und $v \in \ell^2$ gefunden mit*

1. $v_n \rightharpoonup v$ *in* ℓ^2, *und*
2. $0 < \|v\|_2 < \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_2$.

Die letzte Ungleichung ist echt strikt und kein Tippfehler.

In Theorem 2.22 findet man, dass beschränkt plus abgeschlossen in endlich dimensionalen Räumen äquivalent ist zu kompakt. Daraus ergibt sich folgendes:

Korollar 8.4 *Wenn $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume sind, und $\Lambda \in BL((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W))$ ist derart, dass* Range(Λ) *endlich dimensional ist, dann ist Λ ein kompakter Operator.*

Aufgabe 8.4 *Beweisen Sie dieses Korollar.*

Proposition 8.5 *Wenn $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume sind, und $\Lambda, \Lambda_n \in BL((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W))$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind derart, dass Λ_n kompakte Operatoren sind und $\Lambda_n \to \Lambda$ in $\|\cdot\|_{V\to W}$, dann ist auch Λ ein kompakter Operator.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für jede beschränkte Menge $U \subset V$ gilt, dass $\overline{\Lambda(U)}$ kompakt ist. Wegen Lemma 2.21 reicht es sogar, wenn wir zeigen, dass $\overline{\Lambda(U)}$ präkompakt ist. Das heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ sollte man die Menge $\overline{\Lambda(U)}$ überdecken können mit endlich vielen $\{B_\varepsilon(w_i)\}_{i=1}^k$.

Sei $\varepsilon > 0$ und nehmen wir an, dass $U \subset B_R(0)$. Dann gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass für $n \geq n_\varepsilon$ gilt

$$\|\Lambda - \Lambda_n\|_{V\to W} \leq \frac{1}{3R}\varepsilon$$

und das bedeutet für $u \in U$, dass

$$\|\Lambda(u) - \Lambda_n(u)\|_W \leq \frac{1}{3R}\varepsilon \|u\|_V \leq \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

also

$$\Lambda(u) \in B_{\frac{1}{3}\varepsilon}(\Lambda_{n_\varepsilon}(u)).$$

Es folgt, dass

$$\Lambda(U) \subset \bigcup_{u\in U} B_{\frac{1}{3}\varepsilon}(\Lambda_{n_\varepsilon}(u)).$$

Für jedes $w \in \Lambda(U)$ gibt es dann $u_w \in U$ mit

$$\|\Lambda_{n_\varepsilon}(u_w) - w\| < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{8.2}$$

Bemerke, dass $\left\{B_{\frac{1}{3}\varepsilon}(\Lambda_{n_\varepsilon}(u))\right\}_{u\in U}$ auch eine Überdeckung ist von $\overline{\Lambda_{n_\varepsilon}(U)}$. Weil $\overline{\Lambda_{n_\varepsilon}(U)}$ kompakt ist, gibt es endlich viele $w_i \in \Lambda_{n_\varepsilon}(U)$ mit

$$\overline{\Lambda_{n_\varepsilon}(U)} \subset \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} B_{\frac{1}{3}\varepsilon}(w_i) \tag{8.3}$$

Kombiniert man (8.2) und (8.3), so existiert für jedes $w \in \Lambda(U)$ mindestens ein $i \in \{1, \dots, k_\varepsilon\}$ mit

$$\begin{aligned}\|w - w_i\| &= \|w - \Lambda_{n_\varepsilon}(u_w) + \Lambda_{n_\varepsilon}(u_w) - w_i\| \\ &\leq \|w - \Lambda_{n_\varepsilon}(u_w)\| + \|\Lambda_{n_\varepsilon}(u_w) - w_i\| < \tfrac{2}{3}\varepsilon\end{aligned}$$

und für jedes $w \in \overline{\Lambda(U)}$ auch mindestens ein $i \in \{1, \dots, k_\varepsilon\}$ mit

$$\|w - w_i\| \leq \tfrac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

und dies bedeutet: $\{B_\varepsilon(w_i)\}_{i=1}^{k_\varepsilon}$ überdeckt $\overline{\Lambda(U)}$. ■

Aufgabe 8.5 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.*

1. *Beweisen Sie, dass wenn $A, B \in BL(V, \|\cdot\|)$ mit B kompakt, dann sind auch AB und BA kompakt.*
2. *Gibt es $A, B \in BL(V, \|\cdot\|)$, beide nicht kompakt, und derart, dass AB kompakt ist?*
3. *Zeigen Sie, dass wenn $A \in BL(V, \|\cdot\|)$ kompakt ist und $\|A\|_{V\to V} < 1$, dass dann auch $(I - A)^{-1} - I$ kompakt ist.*

Theorem 8.6 (Schauder) *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume und sei $\Lambda \in BL((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W))$. Dann sind äquivalent:*

- *$\Lambda : V \to W$ ist kompakt;*
- *$\Lambda^* : W^* \to V^*$ ist kompakt.*

Nicht nur haben also Λ und seine adjungierte Λ^* die gleiche Norm, sondern sie sind entweder beide kompakt oder beide nicht kompakt.

Beweis. $\Longrightarrow$) Sei Λ kompakt. Wir müssen zeigen, dass für eine beschränkte Folge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W^*$ eine Teilfolge existiert mit $\Lambda^*\phi_{n_k} \to \Phi$ in V^*. Weil die Abbildungen linear sind, dürfen wir ohne Verlust der Allgemeinheit dabei annehmen, dass

$\|\phi_n\|_{W^*} \leq 1$. Aus der Annahme folgt, dass für $B_1(0) \subset V$ die Menge $E := \overline{\Lambda(B_1(0))} \subset W$ kompakt ist. Wir betrachten

$$f_n := \phi_{n|_E} : E \to \mathbb{R}.$$

Die Funktionen f_n sind gleichgradig stetig, weil für alle $w_1, w_2 \in E$ gilt

$$|f_n(w_1) - f_n(w_2)| \leq \|\phi_n\|_{W^*} \|w_1 - w_2\|_W \leq \|w_1 - w_2\|_W ,$$

und außerdem gilt für alle $w \in E$, dass

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(w)| &\leq \|\phi_n\|_{W^*} \|w\|_W \leq \\ &\leq \|\phi_n\|_{W^*} \sup_{v\in B_1(0)} \|\Lambda v\|_W \leq \|\Lambda\|_{V\to W} . \end{aligned}$$

Dann sind die Bedingungen für das Theorem von Arzelà-Ascoli erfüllt und es existiert eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $f \in C(E)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_\infty = 0.$$

Die Norm hier ist definiert durch

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| ; x \in E\}.$$

Die Linearität von f folgt via f_{n_k} aus der von ϕ_{n_k}. Diese konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge. Schlussendlich betrachten wir $\left\{\Lambda^*\phi_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\left\|\Lambda^*\phi_{n_k} - \Lambda^*\phi_{n_\ell}\right\|_{V^*} \\ &= \sup\left\{\left|\Lambda^*\phi_{n_k}(v) - \Lambda^*\phi_{n_\ell}(v)\right| ; \|v\|_V = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\phi_{n_k}(\Lambda v) - \phi_{n_\ell}(\Lambda v)\right| ; \|v\|_V \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{|f_{n_k}(\Lambda v) - f_{n_\ell}(\Lambda v)| ; \|v\|_V \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{|f_{n_k}(w) - f_{n_\ell}(w)| ; w \in E\right\} \\ &= \|f_{n_k} - f_{n_\ell}\|_\infty . \end{aligned}$$

Dann ist $\left\{\Lambda^*\phi_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Banachraum $(V^*, \|\cdot\|_{V^*})$ und deshalb konvergent. Es gibt $\psi \in V^*$ mit $\Lambda^*\phi_{n_k} \to \psi$ für $k \to \infty$.

$\Longleftarrow$) Sei Λ^* kompakt und sei $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine beschränkte Folge. Dann ist $\{F_{v_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V^{**}$, definiert durch

$$F_{v_n}(\varphi) = \varphi(v_n) \text{ für } \varphi \in V^*,$$

eine beschränkte Folge in V^{**} und es existiert wie vorher eine Teilfolge $\left\{\Lambda^{**}F_{v_{n_k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{**}$, die Cauchy-Folge ist. Außerdem gilt

$$\|F_w\|_{W^{**}} = \|w\|_W . \tag{8.4}$$

Denn

$$\|F_w\|_{W^{**}} = \sup\left\{\frac{|\varphi(w)|}{\|\varphi\|_{W^*}} ; \varphi \in W^* \setminus \{0\}\right\} \leq \|w\|_W$$

und, nehmen wir $\psi_w(tw) = t\|w\|_W$ auf $\mathrm{Span}(w) \subset W$ und erweitern dies mit Hahn-Banach zu $\varphi_w \in W^*$ mit gleicher Norm 1, so folgt

$$\|F_w\|_{W^{**}} \geq \frac{|\varphi_w(w)|}{\|\varphi_w\|_{W^*}} = \|w\|_W .$$

Mit Hilfe der Linearität und (8.4) folgt, dass

$$\|\Lambda v_{n_k} - \Lambda v_{n_\ell}\|_W = \left\|\Lambda^{**}F_{v_{n_k}} - \Lambda^{**}F_{v_{n_\ell}}\right\|_{W^{**}} \to 0,$$

das heißt, $\{\Lambda v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W$ ist eine Cauchy-Folge. Weil $(W, \|\cdot\|_W)$ nach Annahme ein Banachraum ist, ist die Folge $\{\Lambda v_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent. ■

8.2 Nochmals schwache Konvergenz

Proposition 8.7 *Sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein Banachraum und sei* $\Lambda \in BL(V, \|\cdot\|)$ *kompakt. Wenn für* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ *gilt*

$$v_n \rightharpoonup v \text{ in } V,$$

dann folgt

$$\Lambda v_n \to \Lambda v \text{ in } V.$$

Beweis. In Lemma 7.4 finden wir, dass v_n gleichmäßig beschränkt ist. Weil Λ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge mit $\Lambda v_{n_k} \to w \in V$. Also $\phi(v_n) \to \phi(v)$ wenn $n \to \infty$ für alle $\phi \in V^*$, und dies gilt dann auch für $\Lambda^*\phi \in V^*$, denn $\Lambda^* \in BL(V^*, \|\cdot\|_*)$. Weil

$$(\Lambda^*\phi)(v) = \phi(\Lambda v)$$

folgt $\phi(\Lambda v_{n_k}) \to \phi(\Lambda v)$ für $k \to \infty$. Der schwache Limes ist eindeutig und das bedeutet $w = \Lambda v$.

Also existiert eine Teilfolge mit $\Lambda v_{n_k} \to \Lambda v$ für $k \to \infty$.

Wenn die Folge $\{\Lambda v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach Λv konvergiert, dann gibt es eine Teilfolge $\{\Lambda v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\|\Lambda v_{m_k} - \Lambda v\|_{k\in\mathbb{N}} \geq \varepsilon.$$

Weil $\{v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und Λ kompakt, gibt es auch für diese Folge eine konvergente Teilfolge $\{\Lambda v_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, also $\Lambda v_{m_k} \to \tilde{w} \in V$ und, wie vorher, $\Lambda v_{m_k} \rightharpoonup \Lambda v$ und $\tilde{w} = \Lambda v$, ein Widerspruch. ■

8.3 Integraloperatoren

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und sei $G : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn $G \in C\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right)$, dann ist der **Integraloperator**

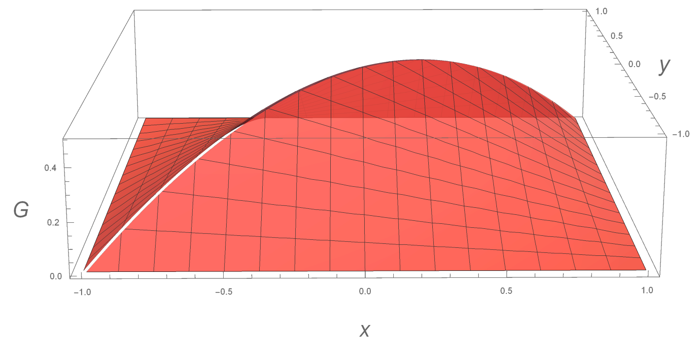
$$(\mathcal{G}f)(x) := \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy \text{ für } f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$$

wohldefiniert als linearer Operator und gilt sogar $\mathcal{G} \in BL\left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_\infty\right)$. Der Operator ist sogar definiert für $u \in L^1(\Omega)$.

Übrigens braucht man nicht unbedingt, dass Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$ ist, oder dass G stetig ist.

Beispiel 8.8 *Wir definieren* $G \in C\left([-1,1]^2\right)$ *durch*

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)(1-y) & \text{für } -1 \leq x \leq y \leq 1, \\ \frac{1}{2}(1-x)(1+y) & \text{für } -1 \leq y < x \leq 1. \end{cases}$$



Sei u für $f \in C[-1,1]$ *definiert durch*

$$u(x) := \int_{-1}^{1} G(x,y)\, f(y)\, dy$$

so findet man, dass $u \in C^2[-1,1]$ und weiter, dass

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ für } x\,[-1,1], \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

. . . .

Aufgabe 8.6 *Zeigen Sie die Behauptungen in Beispiel 8.8.*

Aufgabe 8.7 *Beweisen Sie, dass*

$$\mathcal{G} : L^2(-1,1) \to L^2(-1,1),$$

definiert mit G aus Beispiel 8.8 durch

$$(\mathcal{G}f)(x) = \int_{-1}^{1} G(x,y)\, f(y)\, dy$$

in $BL(L^2(-1,1), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ liegt und dass $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}$.

Aufgabe 8.8 *Sei*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x, y \in \mathbb{R};\ -1 < y < x < 1\}, \\ D_2 &= \{x, y \in \mathbb{R};\ -1 < x < y < 1\}, \end{aligned}$$

und seien $g_1 \in C^1\left(\overline{D_1}\right)$ und $g_2 \in C^1\left(\overline{D_2}\right)$.

Zeigen Sie, dass für $f \in C[-1,1]$ gilt:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^{x} g_1(x,y)\, f(y)dy + \int_{x}^{1} g_2(x,y)\, f(y)dy\right) \\ &\quad = \int_{-1}^{x} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x,y)\, f(y)dy + g_1(x,x)\, f(x) \\ &\qquad + \int_{x}^{1} \frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y)\, f(y)dy - g_2(x,x)\, f(x). \end{aligned}$$

Theorem 8.9 *Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $G \in C\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right)$. Dann ist $\mathcal{G}$, definiert durch*

$$(\mathcal{G}f)(x) := \int_{\Omega} G(x,y)\ f(y)\ dy$$

ein kompakter Operator in $BL\left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Beweis. Die Linearität folgt direkt. Weil $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ eine kompakte Menge ist, ist G gleichmäßig stetig, Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass

$$|x_a - x_b| < \delta_\varepsilon \implies |G(x_a, y) - G(x_b, y)| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass wenn $|x_a - x_b| < \delta_\varepsilon$, dann

$$|(\mathcal{G}f)(x_a) - (\mathcal{G}f)(x_b)| \leq \int_\Omega \varepsilon\, |f(y)|\, dy \leq \varepsilon \|f\|_{L^1(\Omega)} .$$

Weil $\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq |\Omega|\ \|f\|_\infty$ folgt aus $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, dass $\mathcal{G}f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Hier ist $|\Omega|$ das Volumen von Ω:

$$|\Omega| := \int_\Omega 1 dx.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}f\|_\infty &\leq \max_{x,y\in\overline{\Omega}} |G(x,y)|\, \|f\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \max_{x,y\in\overline{\Omega}} |G(x,y)|\ |\Omega|\ \|f\|_\infty ,\end{aligned}$$

also folgt $\mathcal{G} \in BL\left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{G}$ kompakt ist, verwenden wir Arzelà-Ascoli. Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$ eine durch M beschränkte Folge, das heißt

$$\|f_n\|_\infty \leq M \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für $|x_a - x_b| < \delta_\varepsilon$, dass

$$|(\mathcal{G}f_n)(x_a) - (\mathcal{G}f_n)(x_b)| \leq M\, |\Omega|\, \varepsilon,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und das bedeutet $\{\mathcal{G}f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig stetig. Dann hat $\{\mathcal{G}f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. ■

Eine wichtige Verallgemeinerung sind die nach Schur benannten Integraloperatoren.

Definition 8.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $G : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to [-\infty, \infty]$ derart, dass $\alpha < n$ und $g \in C\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right)$ existiert derart, dass*

$$g(x,y) = |x-y|^\alpha\, G(x,y) \text{ für } x \neq y.$$

Dann nennt man $\mathcal{G}$ definiert durch

$$(\mathcal{G}f)(x) := \int_\Omega G(x,y)\, f(y) dy \tag{8.5}$$

einen ***Schur-Integraloperator****.*

Bemerke, dass $y \mapsto G(x,y)\, f(y)$ in x eine Singularität von Ordnung $-\alpha$ haben kann. In n Dimensionen sind solche Singularitäten jedoch integrierbar: Für stetige Funktionen f gilt:

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)} \left||y|^{-\alpha} f(y)\right| dy &= \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^R \left|r^{-\alpha} f(r\omega)\right| r^{n-1} dr d\omega \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^R r^{n-\alpha-1} dr d\omega \\ &= \|f\|_\infty\, \sigma_n \left[\frac{1}{n-\alpha} r^{n-\alpha}\right]_{r=0}^R = \|f\|_\infty\, \sigma_n \frac{1}{n-\alpha} R^{n-\alpha}.\end{aligned}$$

Wir beschreiben mit ω den Winkelanteil der n-dimensionalen Kugelkoordinaten. Für den Hyperflächeninhalt von $\mathbb{S}^{n-1}$, der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$, verwenden wir das Symbol σ_n:

$$\sigma_n = \int_{\omega\in\mathbb{S}^{n-1}} 1\ d\omega,$$

oder einfacher: σ_n ist der Flächeninhalt der Einheitssphäre.

Beispiel 8.11 *Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$. Für alle $f \in C^1\left(\overline{B_1(0)}\right)$ gibt*

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G_n(x,y)\, f(y) dy$$

mit

$$G_n(x,y) = \frac{|x-y|^{2-n} - \sqrt{|x-y|^2 + \left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right)}^{\,2-n}}{\sigma_n (n-2)}$$

die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0), \end{cases} \tag{8.6}$$

mit $\partial B_1(0)$ dem Rand von $B_1(0)$.
Bemerke, dass $|x-y|^{n-2}\, G_n(x,y)$ stetig fortsetzbar ist für $x = y \in \overline{B_1(0)}$.

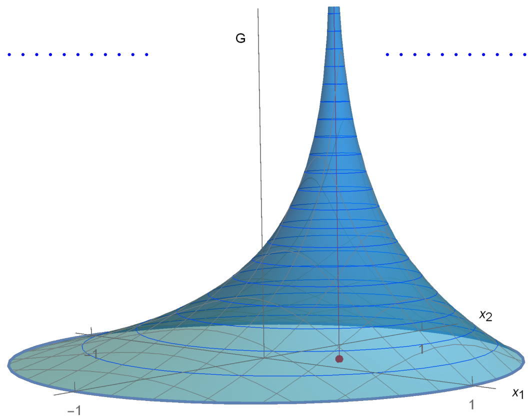


Abbildung 8.1: $x \mapsto G_2(x,y)$ für $y = (0.3, 0.1)$

Aufgabe 8.9 *Für $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ ist die zugehörige Funktion G_2 wie folgt:*

$$G_2(x,y) = \frac{1}{4\pi} \log\left(1 + \frac{\left(1-|x|^2\right)\left(1-|y|^2\right)}{|x-y|^2}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ aus (8.5) mit diesem G_2 ein Schur-Integraloperator ist. Eine Skizze zu $G_2(x,y)$ finden Sie in Abbildung 8.1.

Theorem 8.12 *Sei Ω und G wie in Definition 8.10. Dann gilt $\mathcal{G} \in BL\left(C\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ und $\mathcal{G}$ ist kompakt.*

Ein Beweis dieses Theorems braucht einige technische Abschätzungen von Integralen und diese werden wir hier weglassen.

. . . .

Aufgabe 8.10 *In dieser Aufgabe ist $B_1(0)$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}^+$. Sei $h \in C(\overline{B_1(0)})$ und setze*

$$g(x) := \int_{B_1(0)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} h(y)\, dy.$$

1. *Zeigen Sie, dass für $\alpha < n-1$ und $|x| < 1$ gilt, dass*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x) := -\alpha \int_{B_1(0)} \frac{(x_i - y_i)}{|x-y|^{\alpha+2}} h(y)\, dy. \tag{8.7}$$

   Hinweis: majorisierte Konvergenz von Lebesgue.

2. *Wieso gilt (8.7) im Allgemeinen nicht für $\alpha > n-1$?*
   Hinweis: $h(y) := |y_i|^\varepsilon \operatorname{sign}(y_i)$ ist stetig für $\varepsilon > 0$.

Kapitel 9

Fredholm und Definition des Spektrums

9.1 Fredholm im Hilbertraum

In endlichen Dimensionen kann man lineare Abbildungen mit Matrizen darstellen. Für eine Abbildung

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

hat man die folgenden Ergebnisse:

- A ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ A ist injektiv.

Man kann noch genauer sagen:

- $\dim(\operatorname{Ker}(A)) + \dim(\operatorname{Range}(A)) = n.$

Wenn $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = k$ und $1 \leq k \leq n$, dann braucht man noch genau zusätzlich k unabhängige Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\} \notin \operatorname{Range}(A)$ für die Zerlegung

$$\operatorname{Range}(A) \oplus \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathbb{R}^n.$$

Man nennt k die **Kodimension** von $\operatorname{Range}(A)$.

Man sieht, dass folgendes gilt:

$$\dim(\operatorname{Ker}(A)) = \operatorname{codim}(\operatorname{Range}(A)). \tag{9.1}$$

Bei unendlich dimensionalen Vektorräumen gilt so etwas wie in (9.1) im Allgemeinen nicht. Das Ergebnis in (9.1) lässt sich jedoch übertragen bei einigen unendlich dimensionalen normierten Vektorräumen für

$$A := I - K \in BL(V, \|\cdot\|),$$

wenn K ein kompakter Operator ist. Das werden wir hier zeigen.

Ein solcher Operator der Form $I - K$, mit K kompakt, heißt **Fredholm-Operator.**

Bei den Überlegungen dazu werden auch die Eigenwerte und Eigenvektoren eines Operators A eine Rolle spielen.

Definition 9.1 *Sei $A \in L(V;V)$ mit V einem Vektorraum. Man nennt eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ einen* ***Eigenwert*** *von A, wenn ein nicht-trivialer Vektor $v \in V$ existiert mit*

$$Av = \lambda v$$

Diesen Vektor v nennt man einen ***Eigenvektor*** *bei dem Eigenwert λ.*

Möchte man komplexe Eigenwerte beim reellen Vektorraum V betrachten, dann betrachtet man $V_{\mathbb{C}} := \{v_1 + iv_2; v_1, v_2 \in V\}$ mit den üblichen Rechenregeln bei komplexen Zahlen. Eine Norm auf V erweitert man meistens nicht so einfach zu einer Norm für $V_{\mathbb{C}}$. Dazu später mehr.

Die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ sind derart, dass $A - \lambda I : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ nicht injektiv ist.

Bemerkung 9.1.1 *Das letzte bedeutet bei einer Matrix A, dass λ eine Nullstelle des Polynoms n-ten Grades* $\det(A - \lambda I) = 0$ *ist. Der Hauptsatz der Algebra sagt, dass ein Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ in $\mathbb{C}$ hat, jedenfalls wenn man inklusive der möglichen Multiplizität zählt. Für die algebraische und geometrische Multiplizität lesen Sie noch mal bei Lineare Algebra nach.*

Hat man n unabhängige Eigenvektoren, dann kann man eine Matrix A diagonalisieren. Durch Diagonalisieren wird das n-dimensionale Problem $Au = f$ zerlegt in n eindimensionale Probleme $u_i = \lambda_i f_i$ für $i = 1, \dots n$.

Symmetrische Matrizen haben diesbezüglich sehr angenehme Eigenschaften:

- *Wenn A symmetrisch ist, also $A = A^{\mathrm{T}}$, dann sind alle Eigenwerte reell und dann gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren für $\mathbb{R}^n$.*
- *Wenn A symmetrisch ist, dann gilt außerdem, dass*
$$\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Range}(A)^{\perp}.$$

All dies sollte Ihnen bekannt vorkommen, wenn Sie Lineare Algebra gehört haben. Wir werden jetzt zeigen, dass auch diese Ergebnisse sich übertragen lassen auf unendlich dimensionale Vektorräume oder manchmal nur auf Hilberträume, wenn man Symmetrie ersetzt durch Selbstadjungiertheit.

Definition 9.2 *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Ein Operator $K \in BL(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt selbstadjungiert, wenn $K = K^*$.*

Der Satz zu Fredholm-Operatoren, noch ohne Verwendung der Selbstadjungiertheit folgt. Weil $H^* = H$ für einen Hilbertraum, folgt $K^{**} = K$ und wegen Theorem 8.6 können Sie in den Aussagen K und K^* umtauschen.

Theorem 9.3 (Fredholm-Eigenschaften im Hilbertraum) *Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbertraum und sei $K \in BL(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ kompakt. Dann gilt folgendes:*

1. $\operatorname{Ker}(I - K)$ *ist endlich dimensional.*
2. $\operatorname{Range}(I - K)$ *ist abgeschlossen.*
3. $\operatorname{Range}(I - K) = \operatorname{Ker}(I - K^*)^{\perp}$.
4. $\operatorname{Ker}(I - K) = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{Range}(I - K) = H$.
5. $\dim(\operatorname{Ker}(I - K)) = \dim(\operatorname{Ker}(I - K^*))$.

Beweis. Wenn H endlich dimensional ist, dann sind die Behauptungen entweder trivial oder ein Ergebnis aus der Linearen Algebra. Wir dürfen also annehmen, dass H unendlich dimensional ist.

1. Wenn $\operatorname{Ker}(I-K)$ unendlich dimensional ist, dann findet man mit Gram-Schmidt eine Folge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset H$ mit $(I-K)\,e_n = 0$ und $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm}$. Diese Menge ist beschränkt, weil $\|e_n\| = 1$ für alle n und, weil $Ke_n = e_n$ und K kompakt ist, sollte $\{Ke_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine konvergente Teilfolge haben. Es gilt jedoch für alle $n \neq m$, dass

$$\begin{aligned}\|Ke_n - Ke_m\|^2 &= \|e_n - e_m\|^2 \\ &= \langle e_n, e_n\rangle - 2\langle e_n, e_m\rangle + \langle e_m, e_m\rangle = 1 + 0 + 1,\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

2. Wir behaupten:

$$\exists \beta > 0\ \forall v \in \operatorname{Ker}(I-K)^\perp : \|v - Kv\| \geq \beta\,\|v\|\,. \tag{9.2}$$

Nehmen wir an, dies ist nicht der Fall. Dann gibt es eine Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Ker}(I-K)^\perp$ mit

$$\|v_n - Kv_n\| < \frac{1}{n}\,\|v_n\|\,.$$

Durch Skalierung dürfen wir annehmen, dass $\|v_n\| = 1$. Weil $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\{Kv_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, die konvergiert: $Kv_{n_k} \to w$ für $k \to \infty$. Dann gilt jedoch auch, dass

$$\begin{aligned}\|v_{n_k} - w\| &\leq \|v_{n_k} - Kv_{n_k}\| + \|Kv_{n_k} - w\| \\ &\leq \frac{1}{n_k} + \|Kv_{n_k} - w\| \to 0 \text{ für } k \to \infty.\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung findet man

$$\|w\| = \lim_{k\to\infty} \|v_{n_k}\| = 1.$$

Weil $\operatorname{Ker}(I-K)^\perp$ abgeschlossen ist, siehe Lemma 4.18, folgt $w \in \operatorname{Ker}(I-K)^\perp$.

Aus $v_{n_k} \to w$ folgt $Kv_{n_k} \to Kw$ und weil der Limes eindeutig ist, gilt $Kw = w$. Dies bedeutet $w \in \operatorname{Ker}(I-K)$ und da

$$\operatorname{Ker}(I-K) \cap \operatorname{Ker}(I-K)^\perp = \{0\}\,,$$

haben wir einen Widerspruch und es gilt die Behauptung in (9.2).

Um zu zeigen, dass $\operatorname{Range}(I-K)$ abgeschlossen ist, nehmen wir $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Range}(I-K)$ mit $v_n \to v$ für $n \to \infty$. Es gibt $u_n \in V$ mit $v_n = u_n - Ku_n$. Es gibt jedoch keinen Grund, dass die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren sollte. Dazu müssen wir diese u_n geschickter wählen.

Sei P die senkrechte Projektion auf $\operatorname{Ker}(I-K)$ aus Theorem 4.19 und betrachte $\tilde{u}_n = u_n - Pu_n$. Weil $Pu_n \in \operatorname{Ker}(I-K)$ folgt $(I-K)\,Pu_n = 0$ und

$$v_n = \tilde{u}_n - K\tilde{u}_n.$$

Die so gewählten $\tilde{u}_n$ konvergieren, denn es gilt $\tilde{u}_n \in \operatorname{Ker}(I-K)^\perp$, und wegen der Behauptung, dass

$$\|v_n - v_m\| = \|(\tilde{u}_n - \tilde{u}_m) - K(\tilde{u}_n - \tilde{u}_m)\| \geq \beta\,\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|\,.$$

Dann ist $\{\tilde{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und konvergent wegen der Vollständigkeit. Es gibt also $w \in H$ mit $\tilde{u}_n \to w$ für $n \to \infty$. Dann gilt auch, dass $v_n \to w - Kw$. Das bedeutet

$$v = (I-K)\,w \in \operatorname{Range}(I-K)\,.$$

3. Wegen Schauder ist auch K^* kompakt und so ist wegen 1. auch $\operatorname{Ker}(I-K^*)$ endlich dimensional und daher abgeschlossen. Wegen 2. ist $\operatorname{Range}(I-K)$ abgeschlossen. Statt

$\text{Range}\,(I-K) = \text{Ker}\,(I-K^*)^\perp$ können wir dann auch zeigen, dass

$$\text{Range}\,(I-K)^\perp = \text{Ker}\,(I-K^*)\,.$$

Dieses Ergebnis findet man in Lemma 7.18.

4. $\Longrightarrow$) Nehme an $\text{Ker}\,(I-K) = \{0\}$ und $\text{Range}\,(I-K) \neq H$. Weil $\text{Ker}\,(I-K) = \{0\}$ gibt es für jedes $v \in \text{Range}\,(I-K)$ genau ein $w \in H$ mit $v = (I-K)\,w$. Das heißt

$$I-K : H \to H_1 := \text{Range}\,(I-K) = (I-K)\,H$$

ist bijektiv. Wegen 2. ist H_1 eine abgeschlossene Teilmenge von H und, weil $H_1 \neq H$, gibt es ein Element $0 \neq e_1 \in H_1^\perp$, bei dem wir nach Skalieren annehmen dürfen, dass $\|e_1\| = 1$.

Dann ist auch

$$(I-K)^2 : H \to H_2 := (I-K)^2\,H$$

bijektiv und für $(I-K)\,e_1 \neq 0$, weil $\text{Ker}\,(I-K) = \{0\}$, folgt $(I-K)\,e_1 \in H_1 \setminus H_2$. Denn $(I-K)\,e_1 = (I-K)^2\,v$ würde $e_1 = (I-K)\,v \in H_1$ implizieren. Weil $H_2 \subset H_1$ können wir $0 \neq e_2 \in H_1 \cap H_2^\perp$ finden mit $\|e_2\| = 1$.

Dies können wir fortsetzen und finden Teilmengen $H_k = (I-K)^k\,H$ mit

$$H \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq H_3 \supsetneq \dots$$

und $e_k \in H_{k-1} \cap H_k^\perp$ mit $\|e_k\| = 1$.

Dann ist $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ eine beschränkte Folge und weil K kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\{Ke_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. Jedoch gilt für $m > n$, dass

$$Ke_n - Ke_m = e_n - \underbrace{((I-K)\,e_n + e_m - (I-K)\,e_m)}_{\in H_{n+1}}$$

und weil $e_n \in H_{n+1}^\perp$ und $\|e_n\| = 1$, folgt mit Cauchy-Schwarz, dass

$$\|Ke_n - Ke_m\| \geq \langle Ke_n - Ke_m, e_n\rangle = 1.$$

Das Letzte widerspricht der Konvergenz.

$\Longleftarrow$) Wenn $\text{Range}\,(I-K) = H$, dann folgt aus Lemma 7.18, dass $\text{Ker}\,(I-K^*) = H^\perp = \{0\}$. Schauder sagt, dass auch K^* kompakt ist und daher gilt mit dem letzten Punkt, dass

$$\text{Range}\,(I-K^*) = H.$$

Wiederum mit Lemma 7.18 folgt

$$\text{Ker}\,(I-K) = H^\perp = \{0\}\,.$$

5. Wegen Schauder ist auch K^* kompakt. Das bedeutet, dass

$$\text{Ker}\,(I-K) = \text{Range}\,(I-K^*)^\perp \text{ und}$$
$$\text{Ker}\,(I-K^*) = \text{Range}\,(I-K)^\perp$$

endlich dimensional sind. Nehmen wir an, dass

$$\dim \text{Ker}\,(I-K) < \dim \text{Range}\,(I-K)^\perp\,,$$

dann gibt es eine lineare Abbildung

$$\Lambda_1 : \text{Ker}\,(I-K) \to \text{Range}\,(I-K)^\perp\,,$$

die injektiv ist jedoch nicht surjektiv. Weil

$$H = \text{Ker}\,(I-K) \oplus \text{Ker}\,(I-K)^\perp\,,$$

kann man Λ_1 durch 0 erweitern auf $\operatorname{Ker}(I-K)^\perp$ und bekommt $\Lambda \in BL(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Weil $\operatorname{Range}(\Lambda)$ endlich dimensional ist, ist Λ kompakt und auch $K+\Lambda$.

Sei P die nach Theorem 4.19 wohldefinierte Projektion auf $\operatorname{Ker}(I-K)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}(I-K-\Lambda)\,v &= (I-K-\Lambda)\,(Pv+(I-P)\,v)\\ &= \underbrace{-\Lambda P v}_{\in \operatorname{Range}(I-K)^\perp} + \underbrace{(I-K)\,(I-P)\,v}_{\in \operatorname{Range}(I-K)}.\end{aligned} \tag{9.3}$$

Sei nun $v \in \operatorname{Ker}(I-K-\Lambda)$. Wegen (9.3) folgt, dass $(I-K-\Lambda)\,v=0$, genau dann, wenn

$$\Lambda P v = 0 \text{ und } (I-K)\,(I-P)\,v = 0.$$

Weil $\Lambda P v = 0$ bedeutet, dass $Pv=0$, finden wir

$$0 = (I-K)\,(I-P)\,v = (I-K)\,v$$

und $(I-P)\,v = v \in \operatorname{Ker}(I-K) \cap \operatorname{Ker}(I-K)^\perp$. Das bedeutet $\operatorname{Ker}(I-K-\Lambda) = \{0\}$ und wegen 4., dass

$$\operatorname{Range}(I-K-\Lambda) = H. \tag{9.4}$$

Wir haben angenommen, dass

$$w \in \operatorname{Range}(I-K)^\perp \setminus \operatorname{Range}(\Lambda)$$

existiert und wegen (9.4) soll es $v \in H$ geben mit

$$(I-K-\Lambda)\,v = w,$$

und aus (9.3) sieht man, dass dann $w = -\Lambda P v$ gilt und $w \in \operatorname{Range}(\Lambda)$, ein Widerspruch. ■

Wenn man interessiert ist an Lösungen der Gleichung

$$u - Ku = f \tag{9.5}$$

in einem Banachraum $(V, \|\cdot\|_V)$ mit $K \in BL(V, \|\cdot\|_V)$ kompakt, das heißt, $f \in V$ ist gegeben und man sucht $u \in V$, dann gibt es nur die folgenden Möglichkeiten.

Man nennt dieses Ergebnis das **Fredholm Alternativ**:

- Wenn $\operatorname{Ker}(I-K) = \{0\}$, dann hat (9.5) für jedes $f \in V$ genau eine Lösung $u \in V$.

- Wenn $\operatorname{Ker}(I-K) \neq \{0\}$, dann hat (9.5) für $f \in V$ eine Lösung $u \in V$, genau dann wenn $f \in \operatorname{Range}(I-K^*)^\perp$. Wenn u eine Lösung ist, dann ist auch $u+v$ mit $v \in \operatorname{Ker}(I-K)$ eine Lösung und jede Lösung in V kann man so schreiben.

. . . .

Aufgabe 9.1 *Wir betrachten in $(L^2(0,1), \|\cdot\|_2)$ und*

$$(Ku)(x) := (1-x)\int_0^x y u(y) dy + x \int_x^1 (1-y)\, u(y)\, dy.$$

1. *Zeigen Sie, dass $K \in BL(L^2(0,1), \|\cdot\|_2)$.*

2. *Zeigen Sie, dass K selbstadjungiert ist.*

3. *Zeigen Sie, es gibt $c_1 > 0$ derart, dass*

$$\|Ku\|_\infty \leq c_1 \|u\|_2 \text{ für alle } u \in L^2(0,1).$$

4. *Zeigen Sie, es gibt $c_2 > 0$ derart, dass*

$$|(Ku)(x) - (Ku)(y)| \leq c_2 |x-y|^{1/2} \|u\|_2$$

für alle $u \in L^2(0,1)$.

5. *Man findet:*

   (a) *Für $\|u\|_2 \leq 1$ gilt, dass Ku gleichmäßig gleichgradig stetig ist.*

   (b) *$K(\{u \in L^2(0,1); \|u\|_2 \leq 1\})$ ist kompakt wegen Arzela-Ascoli.*

   (c) *Die Einbettung $C^0[0,1] \to L^2(0,1)$ ist stetig.*

   Begründen Sie diese Aussagen und zeigen Sie so, dass $K \in BL((L^2(0,1), \|\cdot\|_2))$ kompakt ist.

6. *Begründen Sie, dass für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Ker}(\lambda I - K) \in C^2[0,1]$.*

7. *Für $u \in C^2[0,1]$ gilt*

$$u \in \operatorname{Ker}(\lambda I - K)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \lambda u''(x) + u(x) = 0 \text{ für } x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

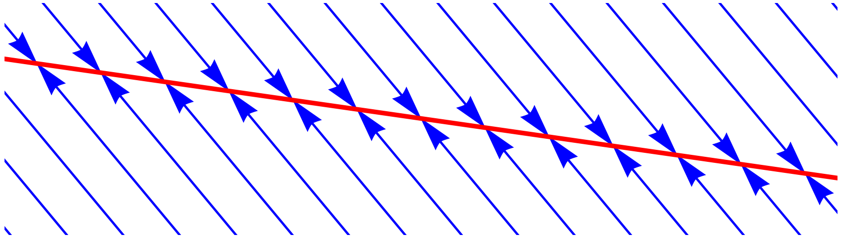
8. *Zeigen Sie* $\operatorname{Ker}(\lambda I - K) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \lambda \in \left\{\frac{1}{k^2\pi^2}; k \in \mathbb{N}^+\right\}$.

9. *Was können Sie für $f \in L^2(0,1)$ sagen zu einer Lösung $u \in L^2(0,1)$ von $(\lambda I - K)u = f$?*

10. *Was bedeutet hier das Fredholm Alternativ?*

9.2 Projektion in einem normierten Vektorraum

Wenn man kein Hilbertraum hat, dann gibt es nicht unbedingt eine natürliche Definition eines Winkels zweier Elemente. Man kann jedoch eine Projektion definieren, wenn man die Orthogonalität weglässt.



Sei also $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum.

Definition 9.4 *Sei $P : V \to V$ eine lineare Abbildung.*

- *P nennt man eine **Projektion**, wenn $P^2 = P$.*
- *Wenn außerdem gilt, dass $P(V) = X$, dann nennt man P eine Projektion auf dem Teilraum $X \subset V$.*

Aufgabe 9.2 *Sei $v \in V \setminus \{0\}$ derartig, dass $Pv = \lambda v$. Welche Werte kann λ haben?*

Die orthogonalen Projektionen, die bei Theorem 4.19 vorgestellt wurden, sind ein spezieller Fall. Für solche orthogonale Projektionen gilt $\|P\|_{V\to V} = 1$. Die Projektionen in Definition 9.4 müssen nicht mal stetig sein. Wenn eine Projektion P stetig ist und nicht trivial, dann gilt $\|P\|_{V\to V} \geq 1$. Das folgt direkt, denn wenn P nicht trivial ist, dann gibt es $v \in V$ mit $Pv \neq 0$ und dann kann man zu der Norm folgendes sagen:

$$\|P\|_{V\to V} = \sup\left\{\frac{\|Px\|_V}{\|x\|_V}; 0 \neq x \in V\right\} \geq \frac{\|P(Pv)\|_V}{\|Pv\|_V} = 1.$$

Beispiel 9.5 *Wir betrachten $P : c_{00} \to c_{00}$ definiert durch*

$$P(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1 - x_2, 0, x_3 - 2x_4, 0, x_5 - 3x_6, 0, \dots).$$

Dann ist P eine Projektion, die nicht stetig ist in $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$.

....

Aufgabe 9.3 *Beweisen Sie diese letzte Aussage.*

Lemma 9.6 *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum und sei $P : V \to V$ eine Projektion. Dann gilt*

1. *$I - P$ ist auch eine Projektion,*
2. $\operatorname{Ker}(P) = \operatorname{Range}(I - P)$ *und* $\operatorname{Range}(P) = \operatorname{Ker}(I - P)$,
3. $V = \operatorname{Ker}(P) \oplus \operatorname{Range}(P)$, *das heißt, für jedes $v \in V$ gibt es genau ein Paar* $(x, y) \in \operatorname{Ker}(P) \times \operatorname{Range}(P)$ *mit $v = x + y$.*

Beweis. 1) Weil $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$ gilt, ist auch $I - P$ eine Projektion.

2) Wenn $x \in \operatorname{Ker}(P)$, dann folgt $Px = 0$ und $x = (I - P)x \in \operatorname{Range}(I - P)$. Wenn $x \in \operatorname{Range}(I - P)$, dann existiert $v \in V$ mit $(I - P)v = x$ und $Px = P(I - P)v = Pv - P^2v = 0$, also $x \in \operatorname{Ker}(P)$. Ähnliches gilt für $I - P$.

3) Für $v \in V$ gilt $Pv \in \operatorname{Range}(P)$ und $(I - P)v \in \operatorname{Ker}(P)$, also gibt es eine Zerlegung von v.

Die Zerlegung ist eindeutig, denn wenn $v = \tilde{x} + \tilde{y} = x + y$ mit $x, \tilde{x} \in \operatorname{Ker}(P)$ und $y, \tilde{y} \in \operatorname{Range}(P) = \operatorname{Ker}(I - P)$, dann gilt

$$\begin{aligned} x &= (I - P)x = (I - P)(v - y) \\ &= (I - P)(\tilde{x} + \tilde{y} - y) = (I - P)(\tilde{x}) = \tilde{x} \end{aligned}$$

und dann auch $y = \tilde{y}$. ■

Für einen beliebigen Teilraum kann man eine Projektion finden. Ähnlich wie bei dem Satz von Hahn-Banach brauchen wir das Auswahlaxiom. Dies wenden wir an, um die Identität $I : X \to X$ fortzusetzen zu einer Projektion $P : V \to X$.

Theorem 9.7 *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum und sei X ein Teilraum. Dann existiert eine Projektion P mit $P(V) = X$ und $Px = x$ für $x \in X$.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass es $x \in X \setminus \{0\}$ gibt. Setze

$$\mathcal{P} := \left\{ (V_i, P_i) ; \begin{array}{l} X \subset V_i \subset V \text{ mit } V_i \text{ einen Teilraum von } V \\ P_i : V_i \to X \text{ linear mit } P_i x = x \text{ für } x \in X \end{array} \right\}$$

und definiere eine Ordnung von $\mathcal{P}$ durch

$$(V_i, P_i) \preceq (V_j, P_j), \text{ wenn } V_i \subset V_j \text{ und } P_i v = P_j v \text{ für } v \in V_i.$$

Die Menge $\mathcal{P}$ ist nicht leer, weil $(X, I) \in \mathcal{P}$. Mit dem Maximalitätsprinzip von Hausdorff folgt, dass es ein $(V_{\max}, P_{\max}) \in \mathcal{P}$ gibt derart, dass $X \subset V_{\max} \subset V$ und dass $P_i x = x$ für $x \in X$. Wenn $V_{\max} \neq V$ dann gibt es $v_0 \in V \setminus V_{\max}$ und wir können ein größeres Paar $(\tilde{V}, \tilde{P})$ definieren durch

$$\tilde{V} := V_{\max} \oplus \operatorname{Span}(v_0) \text{ und } \tilde{P}(v_m + tv_0) := P_{\max}(v_m),$$

und das ist ein Widerspruch. ■

Theorem 9.8 *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, sei X ein abgeschlossener Teilraum von V und $V = X \oplus Y$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt eine stetige Projektion P auf X mit $Y = \operatorname{Ker}(P)$.*
2. *Y ist abgeschlossen.*

Beweis. $\Longrightarrow$) Sei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. Dann gibt es $y \in V$ mit $y_n \to y$. Weil P stetig ist, gilt

$$0 = Py_n \to Py \text{ für } n \to \infty$$

und $Py = 0$ impliziert $y \in \operatorname{Ker}(P) = Y$.

$\Longleftarrow$) Betrachte

$$\left(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}}\right) := (X \times Y, \|\cdot\|),$$

mit $\|(x, y)\| := \|x\|_V + \|y\|_V$. Weil X und Y beide abgeschlossen sind, ist $\left(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}}\right)$ ein Banachraum. Man definiert

$$E \in BL((X \times Y, \|\cdot\|); (V, \|\cdot\|_V))$$

durch $E(x, y) = x + y$.

Die Beschränktheit von E folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\frac{\|E(x,y)\|_V}{\|(x,y)\|} = \frac{\|x+y\|_V}{\|x\|_V + \|y\|_V} \le 1 \text{ für } (x,y) \neq 0.$$

Weil $V = X \oplus Y$, ist E sogar bijektiv. Wegen Korollar 7.8 (Satz der inversen Abbildung)) gilt

$$E^{-1} \in BL((V, \|\cdot\|_V); (X \times Y, \|\cdot\|)).$$

Für $x \in X$ und $y \in Y$ gilt $E^{-1}(x + y) = (x, y)$ und wenn man schreibt

$$(P_X, P_Y)(v) := E^{-1}(v) \text{ für } v \in V,$$

so sind $P_X : V \to X$ und $P_Y : V \to Y$ beschränkte lineare Abbildungen. Die gesuchte Projektion ist

$$P(v) := P_X(v).$$

P ist stetig, und für $x \in X$ und $y \in Y$ gilt, dass $P(x + y) = x$ und $y \in \operatorname{Ker}(P)$. ■

9.3 Definition vom Spektrum

Für jede $m \times m$-Matrix A mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ findet man die zugehörigen Eigenwerte durch

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Dieses Polynom ist von Grad m und ein Polynom von Grad m hat genau m Nullstellen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \mathbb{C}$. Diese Nullstellen müssen nicht alle verschieden sein. Wenn eine Nullstelle λ_i k Mal vorkommt, dann sagt man λ_i hat algebraische Multiplizität k. Die Gleichung

$$(A - \lambda_i I) u = 0$$

hat dann einen Lösungsraum mit Dimension d zwischen 1 und k. Die Zahl d ist die geometrische Multiplizität zu dem Eigenwert λ_i. Der Lösungsraum ist $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ heißt Eigenraum und enthält die Eigenvektoren mit Eigenwert λ_i.

Wenn $d < k$, dann hat

$$(A - \lambda_i I)^2 u = 0$$

einen Lösungsraum mit Dimension d_1 zwischen $d+1$ und k. Der Lösungsraum ist $\text{Ker}\left((A-\lambda I)^2\right)$ enthält die Eigenvektoren und generalisierte Eigenvektoren der ersten Ordnung zu dem Eigenwert λ_i.

Wenn $d_1 < k$, dann hat

$$(A - \lambda_i I)^3 u = 0$$

einen Lösungsraum mit Dimension d_2 zwischen d_1+1 und k. Und so weiter.

Für $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ kann man

$$(A - \lambda I) u = f$$

für alle $f \in \mathbb{R}^m$ (und auch für $f \in \mathbb{C}^m$) eindeutig lösen. Für lineare Abbildungen in $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}^m$ hat man:

$$A - \lambda I \text{ injektiv } \iff A - \lambda I \text{ surjektiv.}$$

Weil man sogar für reelle Matrizen komplexen Eigenwerten begegnet, kann man in Spektraltheorie schlecht die komplexen Zahlen vermeiden.

- Für $A \in M^{m\times m}(\mathbb{R})$ und $A \in M^{m\times m}(\mathbb{C})$ nennt man

  $$\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

  die **Resolventenmenge** von A.

- Für $A \in M^{m\times m}(\mathbb{C})$ mit $\lambda \in \rho(A)$ ist $(A-\lambda I)^{-1}$ wohldefiniert in $M^{m\times m}(\mathbb{C})$.

. . . .

Beispiel 9.9 *Wir betrachten $A : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definiert durch*

$$(Ax)_k = x_{k+1} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+$$

sowohl in $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ als in $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Bemerke, es gilt sowohl

$$A \in BL\left(\ell^2, \|\cdot\|_2\right) \text{ als } A \in BL\left(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$$

und $\|A\|_{\ell^2\to\ell^2} = 1$ als auch $\|A\|_{\ell^\infty\to\ell^\infty} = 1$.

***Injektivität von** $A - \lambda I$**?** Wir suchen erst die Eigenwerte, das heißt, existiert $x \neq 0$ und λ derart, dass*

$$(A - \lambda I) x = 0?$$

Man findet die Gleichungen

$$x_{k+1} - \lambda x_k = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

und dies ergibt für $c \neq 0$ als Eigenvektoren:

$$x = c\left\{1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots\right\}.$$

- *Dieses Element liegt in ℓ^2 genau dann, wenn $|\lambda| < 1$, also für $\lambda \in (-1, 1)$.*

- *Dieses Element liegt in ℓ^∞ genau dann, wenn $|\lambda| \leq 1$, also für $\lambda \in [-1, 1]$.*

Wenn man Eigenwerte in $\mathbb{C}$ sucht, dann findet man $B_1(0)$ beziehungsweise $\overline{B_1(0)}$.

***Bijektivität von** $A-\lambda I$**?** Mit Korollar 7.8 folgt, dass, wenn $A-I:\ell^2\to\ell^2$ bijektiv ist, die Inverse beschränkt ist. Für welche λ existiert $(A-\lambda I)^{-1}$ als beschränkter linearer Operator? Aus*

$$(A-\lambda I)\,x=y,$$

folgen die Gleichungen

$$x_{k+1}-\lambda x_k=y_k \text{ für } k\in\mathbb{N}.$$

Für y gegeben findet man eine Lösung x durch

$$x_k=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}y_{k+m-1},$$

wenn die Reihen für x_k konvergieren. Denn dann gilt

$$\begin{aligned}x_{k+1}-\lambda x_k&=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}y_{k+m}+\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}y_{k+m-1}\\&=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}y_{k+m}+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{m+1}}y_{k+m}=y_k.\end{aligned}$$

Wir müssen also die Konvergenz betrachten. Wenn $|\lambda|>1$ und $y\in\ell^\infty$, also auch für $y\in\ell^2$, weil $\ell^2\subset\ell^\infty$, dann konvergiert die Reihe für jedes $k\in\mathbb{N}^+$.

Ist dieser inverse Operator beschränkt?

- *Wenn $|\lambda|>1$ und $y\in\ell^\infty$ dann gilt sogar*
$$\left\|-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}y_{k+m-1}\right\|_\infty\le\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^m}\|y\|_\infty=\frac{1}{|\lambda|-1}\|y\|_\infty.$$
Die Inverse von $A-\lambda I$ ist in $BL(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$.
- *Wenn $|\lambda|>1$ und $y\in\ell^2$, dann gilt*
$$\left\|-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}y_{k+m-1}\right\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}y_{k+m-1}\right|^2= \tag{9.6}$$
und mit Cauchy-Schwarz folgt
$$\begin{aligned}(9.6)&\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^m}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^m}|y_{k+m-1}|^2\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^m}|y_{k+m-1}|^2\\&=\frac{1}{|\lambda|-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^m}\sum_{k=1}^{\infty}|y_{k+m-1}|^2\le\left(\frac{1}{|\lambda|-1}\right)^2\|y\|_2^2,\end{aligned}$$
also ist die Inverse von $A-\lambda I$ in $BL(\ell^2,\|\cdot\|_2)$.

Wenn $|\lambda|=1$ und $y\in\ell^2$, dann ist λ zwar kein Eigenwert, eine Inverse von $A-\lambda I$ in $BL(\ell^2,\|\cdot\|_2)$ existiert nicht: Betrachte für $\lambda=1$

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=\{\underbrace{1,1,1,\dots,1}_{n\text{ mal }1},0,0,0,\dots\},\\x^{(n)}&=\{-n,1-n,2-n,\dots,-1,0,0,0,\dots\}.\end{aligned}$$

Es gilt $(A-I)\,x^{(n)}=y^{(n)}$, wenn man jedoch die Norm der Inverse anschaut, dann gilt

$$\begin{aligned}\left\|(A-I)^{-1}\right\|_{\ell^2\to\ell^2}&\ge\frac{\|x^{(n)}\|_2}{\|y^{(n)}\|_2}=\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n(k-1-n)^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n1^2}}\\&=\frac{\sqrt{\frac13n^3+\frac12n^2+\frac16n}}{\sqrt{n}}\ge\frac{1}{\sqrt3}n\to\infty,\end{aligned}$$

wenn $n \to \infty$. Mit Korollar 7.8 folgt, dass $A - I : \ell^2 \to \ell^2$ nicht bijektiv ist. Weil 1 hier kein Eigenwert ist, ist $A - I$ injektiv und wohl nicht surjektiv. Man kann hier zeigen, dass

$$\ell^2 \neq (A - I)\left(\ell^2\right) \subset \overline{(A - I)\left(\ell^2\right)} = \ell^2. \tag{9.7}$$

....

Aufgabe 9.4 *Sei $y \in \ell^2$, $\varepsilon > 0$ und A wie im letzten Beispiel.*

1. *Zeigen Sie, wenn man $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ genügend groß wählt, dass für $y^{(n)}$ mit*

   $$y_k^{(n)} = y_k \text{ für } k \leq n \text{ und } y_k^{(n)} = 0 \text{ für } k > n,$$

   gilt, dass $\left\| y - y^{(n)} \right\|_2 < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

2. *Geben Sie $x^{(n)} \in \ell^2$ an, derart, dass $(A - I)\, x^{(n)} = y^{(n)}$.*

3. *Zeigen Sie: für $\tilde{y}$ mit $\tilde{y}_k = \frac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\tilde{y} \in \ell^2$.*

4. *Gibt es $\tilde{x} \in \ell^2$ mit $(A - I)\, \tilde{x} = \tilde{y}$?*

5. *Vergleichen Sie mit (9.7).*

Aufgabe 9.5 *Definiere $B : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ durch*

$$(Bx)_1 = 0 \text{ und } (Bx)_{k+1} = x_k \text{ für } k \in \mathbb{N}^+.$$

1. *Welche Eigenwerte hat $B \in BL\left(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$ und $B \in BL\left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)$?*

2. *Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es eine Linksinverse von $B - \lambda I$ in $BL\left(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$?*

3. *Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es eine Linksinverse von $B - \lambda I$ in $BL\left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)$?*

Aufgabe 9.6 *Bevor Sie diese Aufgabe bearbeiten eine Warnung: man muss schon tüchtig rechnen!*

Definiere $A : L^\infty(\mathbb{R}^+) \to L^\infty(\mathbb{R}^+)$ *durch*

$$(Af)(x) = \int_0^\infty e^{-|x-y|} f(y)\, dy$$

1. *Zeigen Sie, dass* $A \in BL\left(L^\infty(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_\infty\right)$ *als auch, dass* $A \in BL\left(L^1(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_1\right)$.
2. *Zeigen Sie, dass für* $f \in C^2[0,\infty) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$ *gilt*
$$(Af)''(x) = (Af)(x) - 2f(x).$$
3. *Welche Eigenwerte hat* $A \in BL\left(L^\infty(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_\infty\right)$*?*
4. *Welche Eigenwerte hat* $A \in BL\left(L^1(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_1\right)$*?*
5. *Für welche* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gibt es eine Linksinverse von* $A - \lambda I$ *in* $BL\left(L^\infty(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_\infty\right)$*?*
6. *Für welche* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gibt es eine Linksinverse von* $A - \lambda I$ *in* $BL\left(L^1(\mathbb{R}^+), \|\cdot\|_1\right)$*?*

Als eine der wenigen Stellen sind hier normierte Vektorräume über $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ bequemer. Die Vektorräume ℓ^p, $L^p(\Omega)$ und $BC\left(\overline{\Omega}\right)$ lassen sich sehr natürlich komplexifizieren. Das heißt aber nicht, dass alle bisherigen Ergebnisse trivialerweise weiter gültig sind.

Notation 9.10 *Für* $A \in BL\left(V, \|\cdot\|_V\right)$ *schreiben wir ab hier* A^{-1}*, wenn* A^{-1} *eine Abbildung von* $A(V)$ *nach* V *ist mit*

$$A^{-1}(Av) = v \text{ für alle } v \in V.$$

Das bedeutet, dass A^{-1} eine Linksinverse von A ist, die nicht unbedingt auf ganz V sondern nur auf $A(V)$ definiert sein muss. Wenn A Eigenwert 0 hat, gibt es kein A^{-1}.

Definition 9.11 *Sei* $\left(V, \|\cdot\|_V\right)$ *ein Banachraum über* $\mathbb{C}$ *und sei* $A \in BL\left(V, \|\cdot\|_V\right)$*. Sei* $\lambda \in \mathbb{C}$.

- *Man sagt* $\lambda \in \sigma_P(A)$*, das* ***Punktspektrum*** *von* A*, wenn* $v_\lambda \in V \setminus \{0\}$ *existiert mit* $(A - \lambda)\, v_\lambda = 0$.
- *Man sagt* $\lambda \in \rho(A)$*, die* ***Resolventenmenge****, wenn*
$$(A - \lambda I)^{-1} \in BL\left(V, \|\cdot\|_V\right)$$
existiert (dies impliziert, dass $\lambda \notin \sigma_P(A)$*).*
- *Wenn* $\lambda \notin \rho(A)$*, sagt man* $\lambda \in \sigma(A)$*, das* ***Spektrum*** *von* A.

Wenn $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$ für $v_\lambda \in V \setminus \{0\}$, dann ist λ einen Eigenwert von A mit Eigenvektor v_λ. Wenn V ein Funktionenraum ist, nennt man v_λ manchmal auch **Eigenfunktion**.

Das Punktspektrum von A ist die Menge aller Eigenwerte von A. Wenn V endlich dimensional ist, dann gilt $\sigma_P(A) = \sigma(A)$. In Beispiel 9.9 haben wir gesehen, dass es in unendlich dimensionalen Vektorräumen mehr als nur Eigenwerte in dem Spektrum gibt: $\sigma_P(A) \subsetneq \sigma(A)$.

Definition 9.12 *Sei* $\left(V, \|\cdot\|_V\right)$ *ein Banachraum und sei* $A \in BL\left(V, \|\cdot\|_V\right)$*. Sei* $\lambda \in \mathbb{C}$.

- *Wenn* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_P(A)$, *und*

$$(A - \lambda I)(V) \neq \overline{(A - \lambda I)(V)} = V$$

dann sagt man $\lambda \in \sigma_C(A)$, *das* ***kontinuierliche Spektrum*** *von* A.

- *Wenn* $\lambda \in \sigma(A) \setminus (\sigma_P(A) \cup \sigma_C(A))$, *dann sagt man* $\lambda \in \sigma_R(A)$, *das* ***Residualspektrum*** *von* A.

Aus Lemma 7.11 folgt, dass für $A \in BL(V, \|\cdot\|_V)$ gilt

$$\lambda \in \sigma(A) \implies |\lambda| \leq \rho(A). \tag{9.8}$$

Hier ist $\rho(A)$ der Spektralradius von A. Die Aussage in (9.8) sieht man wie folgt: Wenn $|\lambda| > \rho(A)$, dann gilt

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}A\right)^k$$

und diese Reihe konvergiert in $BL(V, \|\cdot\|_V)$, weil

$$\rho\left(\frac{1}{\lambda}A\right) = \frac{1}{|\lambda|}\rho(A) < 1.$$

Aufgabe 9.7 *Wir betrachten* $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ *und* $B : \ell^2 \to \ell^2$, *definiert durch* $(Bx)_k = \frac{1}{k}x_k$ *für* $k \in \mathbb{N}^+$.

1. *Zeigen Sie* $\sigma(B) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k \in \mathbb{N}^+}$.

2. *Geben Sie* $\sigma_P(B)$, $\sigma_C(B)$ *und* $\sigma_R(B)$ *an.*

Aufgabe 9.8 *Wir betrachten* $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ *und* $A : \ell^1 \to \ell^1$ *definiert durch*

$$(Ax)_1 = 0 \text{ und } (Ax)_{k+1} = \tfrac{1}{k}x_k \text{ für } k \in \mathbb{N}^+.$$

1. *Zeigen Sie* $\|A^n\|_{\ell^1 \to \ell^1} = \frac{1}{n!}$ *und berechnen Sie* $\rho(A)$ *und* $\sigma(A)$. *NB* $n! \geq (n/2)^{n/2}$.

2. *Liegt* 0 *in* $\sigma_P(A)$, $\sigma_C(A)$, $\sigma_R(A)$ *oder* $\rho(A)$?

Aufgabe 9.9 *Wir betrachten* $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ *und* $B : \ell^1 \to \ell^1$ *definiert durch*

$$(Bx)_1 = \sum_{k=2}^{\infty} x_k \text{ und } (Bx)_{k+1} = x_k \text{ für } k \in \mathbb{N}^+.$$

1. *Zeigen Sie:* $B \in BL(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.
2. *Zeigen Sie:* $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \sigma_P(B)$.
3. *Zeigen Sie:* $\sigma(B) \setminus \sigma_P(B) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$.

Kapitel 10

Das Spektrum mit Banach

10.1 Reelle und komplexe normierte Räume

Für einen Hilbertraum oder Prähilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{R}$ findet man die **Komplexifizierung** durch

$$H_{\mathbb{C}} = \{u_1 + iu_2; u_1, u_2 \in H\},$$

und $\langle u_1 + iu_2, v_1 + iv_2\rangle_{\mathbb{C}} =$

$$\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle + \ i\left(\langle u_2, v_1\rangle - \langle u_1, v_2\rangle\right).$$

Es folgt, dass

$$\langle u_1 + iu_2, u_1 + iu_2\rangle_{\mathbb{C}} = \langle u_1, u_1\rangle + \langle u_2, u_2\rangle = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$$

und auf natürliche Art

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\|\operatorname{Re}\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{Im}\mathbf{u}\|^2}. \tag{10.1}$$

Man kann kontrollieren, dass die Eigenschaften eines komplexen inneren Produktes und daher auch von einer Norm erfüllt sind. Ein komplexes inneres Produkt erfüllt:

- $u \mapsto \langle u, v\rangle_{\mathbb{C}}$ ist linear für alle $u \in H$,
- $\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\langle v, u\rangle_{\mathbb{C}}}$ für alle $u, v \in H$,
- $\langle u, u\rangle_{\mathbb{C}} > 0$ für alle $0 \neq u \in H$.

. . . .

Aufgabe 10.1 *Sei $(H_{\mathbb{C}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}})$ ein komplexer Hilbertraum. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ in (10.1) wirklich eine Norm ist.*

Für einen Banachraum ist die Erweiterung der Definition der Norm bei V nach $V_{\mathbb{C}}$ nicht selbstverständlich.

. . . .

Beispiel 10.1 *Betrachte $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ und $z \in \ell^\infty_{\mathbb{C}}$ mit*

$$z = \{1+i, 1, 1, 1, 1, \dots\},$$
$$(1+i)\, z = \{2i, 1+i, 1+i, 1+i, 1+i, \dots\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Re}\, z\|_\infty &= \sup\{1,1,1,1,1,\dots\} = 1, \\ \|\mathrm{Im}\, z\|_\infty &= \sup\{1,0,0,0,0,\dots\} = 1, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Re}\,((1+i)\,z)\|_\infty &= \sup\{0,1,1,1,1,\dots\} = 1, \\ \|\mathrm{Im}\,((1+i)\,z)\|_\infty &= \sup\{2,1,1,1,1,\dots\} = 2. \end{aligned}$$

Wie bekommen wir $\|(1+i)\,z\|_{\infty,\mathbb{C}} = |1+i|\,\|z\|_{\infty,\mathbb{C}}$*?*

Lemma 10.2 *Sei* $(V, \|\cdot\|_V)$ *ein normierter Vektorraum über* $\mathbb{R}$*. Dann wird* $V_\mathbb{C} := \{v + iw; v, w \in V\}$ *mit*

$$\|v+iw\|_{V_\mathbb{C}} := \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \sqrt{\left\|\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\,(v+iw)\right)\right\|^2 + \left\|\mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\,(v+iw)\right)\right\|^2}$$

ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$*.*

Ein linearer Operator L auf V wird erweitert zu $V_\mathbb{C}$ durch

$$L(u+iw) := Lu + iLw.$$

. . . .

Aufgabe 10.2 *Zeigen Sie* $\|(1+i)\,z\|_{\infty,\mathbb{C}} = |1+i|\,\|z\|_{\infty,\mathbb{C}}$ *für* z *in Beispiel 10.1.*

Aufgabe 10.3 *Sei* $(V, \|\cdot\|_V)$ *ein normierter Vektorraum über* $\mathbb{R}$*. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für* $\|\cdot\|_{V_\mathbb{C}}$*.*

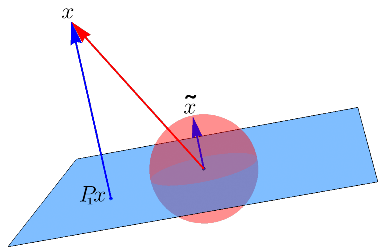
Aufgabe 10.4 *Zeigen Sie, dass für* $L \in BL(V, \|\cdot\|_V)$ *auch für die Erweiterung gilt* $L \in BL\left(V_\mathbb{C}, \|\cdot\|_{V_\mathbb{C}}\right)$*. Vergleichen Sie auch beide Normen.*

10.2 Vorbereitung mit Fredholm

In manchen Beweisen erweitert man einen Teilraum zu einem größeren Teilraum und braucht ein Element in dem größeren Raum, das möglichst weit entfernt ist vom kleineren Teilraum. Im Falle eines Hilbert-Raums $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit abgeschlossenen

Teilräumen $H_1 \subsetneq H_2$, nimmt man $x \in H_2 \setminus H_1$ und definiert mit der orthogonalen Projektion P_1 auf H_1, den Vektor

$$\tilde{x} := \frac{x - P_1 x}{\|x - P_1 x\|} \in H_2$$



Man findet sofort, dass $\tilde{x}$ Norm 1 hat und senkrecht auf H_1 steht. Denn für $y \in H_1$ folgt

$$\langle \tilde{x}, y\rangle = \frac{\langle x - P_1 x, y\rangle}{\|x - P_1 x\|} = \frac{\langle x, y\rangle - \langle x, P_1 y\rangle}{\|x - P_1 x\|} = 0.$$

Von allen Stellen in $H_2 \cap \overline{B_1(0)}$ hat $\tilde{x}$ maximale Distanz zu H_1:

$$1 = \|\tilde{x}\| = \inf\left\{\|\tilde{x} - y\|\, ; y \in H_1\right\}.$$

Ein ähnliches Element braucht man in manchen der folgenden Beweise einiger Ergebnisse im Banachraum. Da fehlt uns jedoch die orthogonale Projektion. Einen Ersatz findet man im folgenden Lemma:

Lemma 10.3 (Existenz eines fast-orthogonalen Elements) *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum mit Teilräumen $V_1 \subsetneq V_2$, wobei V_1 abgeschlossen ist. Dann gibt es für jedes $\theta \in (0,1)$ ein Element $v \in V_2$ mit:*

- $\|v\|_V = 1$ *und*
- $\|v - w\|_V \geq \theta$ *für alle* $w \in V_1$.

Beweis. Sei $v_0 \in V_2 \setminus V_1$. Weil V_1 abgeschlossen ist, gilt

$$d := \inf\left\{\|v_0 - w\|_V\, ; w \in V_1\right\} > 0.$$

Weil $\frac{d}{\theta} > d$, gibt es $w_\theta \in V_1$ mit $\|v_0 - w_\theta\| \leq \frac{d}{\theta}$. Weil $V_1 \subset V_2$ gilt, folgt

$$v := \frac{v_0 - w_\theta}{\|v_0 - w_\theta\|_V} \in V_2$$

mit $\|v\|_V = 1$ und für alle $w \in V_1$, dass

$$\begin{aligned}\|v - w\| &= \left\|\frac{v_0 - w_\theta}{\|v_0 - w_\theta\|_V} - w\right\|_V \\ &= \frac{\left\| v_0 - \overbrace{\left(w_\theta + \|v_0 - w_\theta\|_V\, w\right)}^{\in V_1}\right\|_V}{\|v_0 - w_\theta\|_V} \\ &\geq \frac{d}{\|v_0 - w_\theta\|_V} \geq \theta.\end{aligned}$$

■

Aufgabe 10.5 *Wir betrachten $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.*

1. *c_0 und c sind Teilräume. Finden Sie $x \in c$ mit $\|x\|_\infty = 1$ und*
$$\inf\left\{\|x - y\|_\infty\, ; y \in c_0\right\} = 1.$$

2. *Auch ℓ^2 und c_0 sind Teilräume von $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Für welche $\theta \in (0,1]$ können Sie ein explizites $z \in c_0$ finden mit $\|z\|_\infty = 1$ und*

$$\inf\left\{\|z-y\|_\infty ; y \in \ell^2\right\} = \theta.$$

Das folgende Ergebnis enthält einige Ergebnisse für Banachräume, die wir im letzten Kapitel für Hilbert-Räume gesehen haben.

Theorem 10.4 (Fredholm-Eigenschaften im Banachraum) *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum und sei $K \in BL(V, \|\cdot\|_V)$ kompakt. Dann gilt folgendes:*

1. $\operatorname{Ker}(I-K)$ *ist endlich dimensional.*
2. $\operatorname{Range}(I-K)$ *ist abgeschlossen.*
3. $\operatorname{Ker}(I-K) = \{0\} \implies \operatorname{Range}(I-K) = V$.
4. $\dim(\operatorname{Ker}(I-K)) = \operatorname{codim}(\operatorname{Range}(I-K))$.

Wir werden die vier Aussagen nacheinander beweisen und dabei die vorhergehende Aussage verwenden. Wenn man dann 4. hat, folgt nicht nur 3., sondern auch, dass

$$\operatorname{Ker}(I-K) = \{0\} \iff \operatorname{Range}(I-K) = V.$$

Beweis. 1) Wenn $v \in \operatorname{Ker}(I-K)$, dann gilt $Kv = v$. Also folgt

$$\overline{B_1(0)} \cap \operatorname{Ker}(I-K) \subset K\left(\overline{B_1(0)}\right) = \overline{K(B_1(0))}$$

und weil $\overline{K(B_1(0))}$ kompakt ist, ist $\operatorname{Ker}(I-K)$ endlich dimensional.

2) Sei $0 \neq v \in \overline{\operatorname{Range}(I-K)}$. Dann gibt es $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit

$$0 \neq (I-K)\,v_n \to v \text{ für } n \to \infty. \tag{10.2}$$

Für alle $w \in \operatorname{Ker}(I-K)$ gilt auch, dass

$$(I-K)(v_n - w) \to v \text{ für } n \to \infty.$$

Um zu verhindern, dass diese v_n abhauen durch die w-Komponente, wollen wir sie ersetzen durch $\tilde{v}_n = v_n - w_n$ mit solchen w_n geschickt gewählt. Dazu definieren wir $f : V \to [0,\infty)$ durch

$$f(v) := \inf\left\{\|v-w\|_V ; w \in \operatorname{Ker}(I-K)\right\}.$$

Wenn $f(v_n) = 0$, dann kann man v_n mit Elementen aus $\operatorname{Ker}(I-K)$ approximieren und weil der Kern endlich dimensional ist, folgt $(I-K)v_n = 0$, ein Widerspruch. Wir dürfen

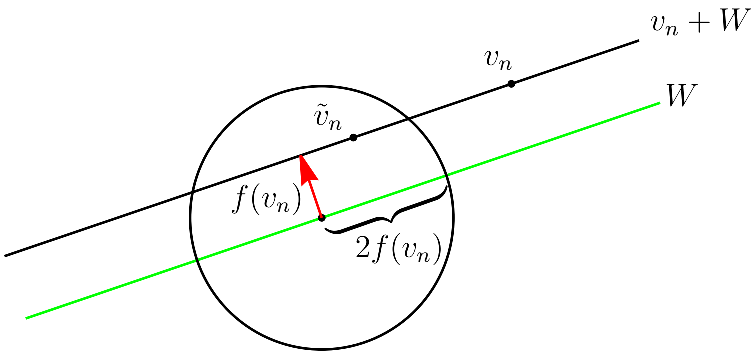


Abbildung 10.1: $W = \mathrm{Ker}\,(I - K)$

also annehmen, dass $f(v_n) > 0$. Wenn $f(v_n) > 0$ gilt, dann gilt auch $f(v_n) < 2f(v_n)$ und es gibt $w_n \in \mathrm{Ker}\,(I-K)$ mit

$$\|v_n - w_n\|_V \leq 2f\,(v_n) = 2f\,(v_n - w_n)$$

und für $\tilde{v}_n = v_n - w_n$, wir schreiben wieder v_n, gilt (10.2) und

$$\|v_n\|_V \leq 2f\,(v_n)\,. \tag{10.3}$$

Wir zeigen zunächst, dass $\{f\,(v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wenn dies nicht so wäre, dann gibt es eine Teilfolge mit $f\,(v_{n_k}) \to \infty$ für $k \to \infty$. Für

$$\tilde{v}_{n_k} = f\,(v_{n_k})^{-1}\,v_{n_k}$$

gilt $\|\tilde{v}_{n_k}\|_V \leq 2$ und $(I-K)\,\tilde{v}_{n_k} \to 0$. Weil K kompakt ist, gibt es eine Teilteilfolge mit $K\tilde{v}_{n_{k'}} \to \tilde{v}_\infty$ und es folgt, dass auch

$$\tilde{v}_{n_{k'}} \to \tilde{v}_\infty.$$

Weil auch $(I-K)\,\tilde{v}_{n_{k'}} \to (I-K)\,\tilde{v}_\infty$, folgt

$$(I-K)\,\tilde{v}_\infty = 0.$$

Die Funktion f ist zwar nicht linear, aber schon homogen und stetig, und dies bedeutet, dass

$$f\left(\tilde{v}_{n_{k'}}\right) = f\left(f\left(v_{n_{k'}}\right)^{-1} v_{n_{k'}}\right) = f\left(v_{n_{k'}}\right)^{-1} f\left(v_{n_{k'}}\right) = 1,$$

obwohl

$$f\left(\tilde{v}_{n_{k'}}\right) \to f\left(\tilde{v}_\infty\right) = 0,$$

ein Widerspruch. Dann ist $\{f\,(v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und wegen (10.3), ist dann auch $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Weil K kompakt ist, hat $\{Kv_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\{Kv_{m_k}\}$. Es gibt also $w \in V$ mit $Kv_{m_k} \to w \in V$ und weil $(I-K)\,v_{m_k} \to v$, folgt, dass

$$\begin{aligned}(I-K)\,v_{m_k} &= (I-K)\,((I-K)\,v_{m_k} + Kv_{m_k})\\ &\to (I-K)\,(v+w)\,,\end{aligned}$$

also

$$v = (I-K)\,(v+w) \in \mathrm{Range}\,(I-K)\,.$$

3) Wir werden hier für $k \in \mathbb{N}^+$ die Teilräume

$$R_k := \mathrm{Range}\left((I-K)^k\right)$$

betrachten. Man bemerke, dass

$$V \supset R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots,$$

und weil wir bei

$$\begin{aligned}(I-K)^k &= \sum\nolimits_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-K)^n\\ &= I - K\left(\sum\nolimits_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-K)^{n-1}\right)\end{aligned}$$

die Form $I-$„kompakt“ haben, folgt, dass die R_k für $k \in \mathbb{N}^+$ wegen 2) abgeschlossen sind. Wenn $V \neq R_1$ gilt und R_1 abgeschlossen ist, gibt es $v_0 \in V \setminus R_1$ mit

$$\inf \{\|v_0 - w\|_V ; w \in R_1\} > 0.$$

Weil $\operatorname{Ker}(I-K) = \{0\}$, folgt

$$v_1 = (I-K)\, v_0 \in R_1 \setminus R_2,$$
$$v_2 = (I-K)\, v_1 \in R_2 \setminus R_3,$$

und so weiter. Also für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$v_n := (I-K)^n\, v_0 \in R_n \setminus R_{n+1}.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von R_{n+1} und Lemma 10.3 gibt es

$$\tilde{v}_n \in R_n \setminus R_{n+1}$$

mit $\|\tilde{v}_n\|_V = 1$ und für alle $w \in R_{n+1}$:

$$\|\tilde{v}_n - w\|_V \geq \frac{1}{2}. \tag{10.4}$$

Für $m > n$ gilt außerdem, dass

$$\tilde{v}_m + (I-K)\,(\tilde{v}_n - \tilde{v}_m) \in R_{n+1},$$

und dies bedeutet wegen (10.4), dass

$$\|K\tilde{v}_n - K\tilde{v}_m\| = \\ \|\tilde{v}_n - (\tilde{v}_m + (I-K)\,(\tilde{v}_n - \tilde{v}_m))\| \geq \frac{1}{2}. \tag{10.5}$$

Weil $\{\tilde{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und K kompakt, sollte $\{K\tilde{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge haben. Dem wird jedoch widersprochen durch (10.5). Das bedeutet $V = R_1 = \operatorname{Range}(I-K)$.

4) Wegen 1) ist $\operatorname{Ker}(I-K)$ endlich dimensional.
Wir zeigen erst $\geq$ und nehmen dazu an, dass

$$n := \dim(\operatorname{Ker}(I-K)) < \operatorname{codim}(\operatorname{Range}(I-K))\,.$$

Dann gibt es unabhängige Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ mit

$$\operatorname{Ker}(I-K) = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}\,, \tag{10.6}$$

und unabhängige Vektoren $\{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ mit

$$\operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_n\} \oplus \operatorname{Range}(I-K) \subsetneq V. \tag{10.7}$$

Definiere φ_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ auf $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ durch

$$\varphi_i\left(\sum\nolimits_{k=1}^n t_k v_k\right) = t_i$$

und erweitere diese linearen Funktionen zu $\phi_i \in V^*$ mit Theorem 3.10. Man betrachtet als nächstes den Operator

$$\tilde{K}v := Kv + \sum\nolimits_{i=1}^n \phi_i(v)\, w_i,$$

der als Summe kompakter Operatoren auch wieder kompakt ist. Es gilt

$$\left(I - \tilde{K}\right) v = (I-K)\, v - \sum\nolimits_{i=1}^n \phi_i(v)\, w_i$$

und wegen (10.7) und (10.6) folgt

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ker}\left(I-\tilde{K}\right) v=0 \\ \Leftrightarrow\ &(I-K)\, v-\sum\nolimits_{i=1}^{n} \phi_i(v)\, w_i=0 \\ \Leftrightarrow\ &(I-K)\, v=0 \text{ und } \phi_i(v)=0 \text{ für } 1\leq i\leq n \\ \Leftrightarrow\ &v\in \operatorname{Span}\{v_1,\dots,v_n\} \text{ und } \phi_i(v)=0 \text{ für } 1\leq i\leq n \\ \Leftrightarrow\ &v=0. \end{aligned}$$

Wegen 3) folgt

$$V=\operatorname{Range}\left(I-\tilde{K}\right)$$

und weil

$$\operatorname{Range}\left(I-\tilde{K}\right)\subset \operatorname{Span}\{w_1,\dots,w_n\}\oplus \operatorname{Range}(I-K),$$

folgt der Widerspruch zu (10.7). Also gilt

$$\dim(\operatorname{Ker}(I-K))\geq \operatorname{codim}(\operatorname{Range}(I-K)). \tag{10.8}$$

Für die andere Ungleichung ($\leq$) verwenden wir, dass wegen Lemma 7.18 gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(I-K)&=\operatorname{Range}(I-K^*)^{\perp} \text{ und} \\ \operatorname{Ker}(I-K^*)&=\operatorname{Range}(I-K)^{\perp}. \end{aligned}$$

Wegen Theorem 8.6 (Schauder) folgt, dass K kompakt ist genau dann, wenn K^* kompakt ist. So folgt mit (10.8), dass

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Ker}(I-K))&=\operatorname{codim}(\operatorname{Range}(I-K^*)) \\ &\leq \dim(\operatorname{Ker}(I-K^*))=\operatorname{codim}(\operatorname{Range}(I-K)). \end{aligned}$$

Beide Ungleichungen liefern zusammen die gewünschte Gleichung. ■

Aufgabe 10.6 *Betrachte* $\left(C[0,2],\|\cdot\|_\infty\right)$ *und* $K: C[0,2]\to C[0,2]$ *definiert durch*

$$(Ku)(x)=\frac{x^2-3x+2}{2}u(0)+\left(2x-x^2\right)u(1)+\frac{x^2-x}{2}u(2).$$

1. *Beschreiben Sie* $\operatorname{Ker}(I-K)$ *und* $\operatorname{Range}(I-K)$.
2. *Ist* K *kompakt?*

10.3 Das Spektrum mit Riesz und Schauder

Wenn man mit linearen Abbildungen $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oder $L:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ zu tun hat, dann kann man direkt einiges zu der Abbildung herleiten, wenn man die Eigenwerte kennt. Am Einfachsten wird es, wenn man die zu der Abbildung gehörende Matrix diagonalisieren kann. Wie man bei Lineare Algebra gelernt hat, ist so etwas nicht immer möglich. Wenn die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte nicht übereinstimmt mit der geometrischen, dann bleibt nur die **Jordan-Normalform**. Zum Beispiel hat die folgende Matrix den vierfachen Eigenwert 1, aber nur mit geometrischer Vielfachheit 2. Rechts steht die Jordan-Normalform.

$$\begin{pmatrix} -\frac{25}{17} & -\frac{363}{136} & -\frac{429}{136} & \frac{111}{68} & -\frac{33}{68} \\ \frac{28}{17} & \frac{60}{17} & \frac{23}{17} & -\frac{10}{17} & \frac{14}{17} \\ \frac{28}{17} & \frac{121}{68} & \frac{211}{68} & -\frac{37}{34} & \frac{11}{34} \\ -\frac{6}{17} & -\frac{349}{272} & \frac{45}{272} & \frac{209}{136} & -\frac{7}{136} \\ \frac{6}{17} & \frac{43}{272} & \frac{261}{272} & -\frac{175}{136} & \frac{41}{136} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} T^{-1}$$

Aufgabe 10.7 *Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörige algebraische und geometrische Vielfachheit bei*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ähnliches wie für $n \times n$-Matrizen gilt für die nicht-0 Eigenwerte eines kompakten Operators in einem unendlich dimensionalen Banachraum.

Theorem 10.5 (Der Riesz-Schauder Spektralsatz für kompakte Operatoren) *Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein unendlich dimensionaler Banachraum und $K \in BL(V, \|\cdot\|_V)$ ein kompakter Operator. Dann gilt:*

1. $0 \in \sigma(K) = \sigma_P(K) \cup \{0\}$.
2. $\sigma_P(K)$ *hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte mit* 0 *als einzig möglichem Häufungspunkt.*
3. *Für $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$ existiert eine Zahl $n_\lambda \in \mathbb{N}^+$ mit*
$$\operatorname{Ker}(K - \lambda I) \subsetneq \operatorname{Ker}\left((K - \lambda I)^2\right) \subsetneq \dots$$
$$\dots \subsetneq \operatorname{Ker}\left((K - \lambda I)^{n_\lambda}\right) = \operatorname{Ker}\left((K - \lambda I)^n\right)$$
für alle $n \geq n_\lambda$.
4. *Für $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$ gilt*
$$V = \operatorname{Ker}\left((K - \lambda I)^{n_\lambda}\right) \oplus \operatorname{Range}\left((K - \lambda I)^{n_\lambda}\right),$$
$\operatorname{Ker}\left((K - \lambda I)^{n_\lambda}\right)$ *ist endlich dimensional und beide Teilräume sind abgeschlossen und K-invariant.*

Notation 10.6 *Sei $\lambda \in \sigma_P(K)$.*

- *Man nennt n_λ den **Index** des Eigenwertes λ.*
- *Die **geometrische Vielfachheit** von λ ist*
$$\dim\left(\operatorname{Ker}(K - \lambda I)\right).$$

- *Die **algebraische Vielfachheit** von λ ist*
$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left((K-\lambda I)^{n_\lambda}\right)\right).$$

Beweis von Theorem 10.5. 1) Wenn $0 \notin \sigma(K)$, dann existiert $K^{-1} \in BL(V, \|\cdot\|_V)$ und gilt, dass $I = K^{-1} \circ K$ kompakt ist. Dann ist $\overline{B_1(0)} = I\left(\overline{B_1(0)}\right)$ eine kompakte Menge und dies widerspricht Theorem 2.22 bei unendlich dimensionalen Räumen.

Für $\lambda \notin \sigma_P(K) \cup \{0\}$ gilt

$$\operatorname{Ker}\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right) = \operatorname{Ker}(K-\lambda I) = \{0\}$$

und dann folgt aus Theorem 10.4.*3*, dass

$$\operatorname{Range}(K-\lambda I) = \operatorname{Range}\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right) = V.$$

Also gilt $\lambda \in \rho(K)$ und das bedeutet $\sigma(K) \subset \sigma_P(K) \cup \{0\}$. Das heißt, das Spektrum außerhalb von 0 besteht nur aus Eigenwerten.

2) Für jeden Eigenwert λ von K gilt $|\lambda| \leq \|K\|_V$. Wenn wir zeigen können, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass es nur endlich viele Eigenwerte gibt mit $\varepsilon < |\lambda| \leq \|K\|_V$, dann wären wir fertig. Nehme also an, K hat unendlich viele verschiedene Eigenwerte mit $|\lambda| > \varepsilon$. Nehmen wir daraus eine abzählbare Menge $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$. Diese Eigenvektoren sind unabhängig, in dem Sinne, dass kein e_i eine Linearkombination seiner Vorgänger ist. Denn, angenommen $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$ ist unabhängig, und e_i hat einen Eigenwert λ_i, verschieden von seinen Vorgängern $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}\}$, und

$$e_i = \sum_{k=1}^{i-1} c_k e_k, \tag{10.9}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = (K-\lambda_i I)\, e_i &= \sum_{k=1}^{i-1} c_k (K-\lambda_i I)\, e_k \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} c_k (\lambda_k - \lambda_i)\, e_k. \end{aligned}$$

Weil die Vorgänger unabhängig sind, folgt $c_k(\lambda_k - \lambda_i) = 0$ für alle k, und weil $\lambda_k \neq \lambda_i$ folgt $c_k = 0$ und ein Widerspruch zu (10.9).

Die endlich dimensionalen Teilräume

$$V_n = \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$$

sind abgeschlossen und es gilt $V_n \subsetneq V_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$. Setze $v_1 = e_1 / \|e_1\|$ und mit Lemma 10.3 gibt es $v_{n+1} \in V_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}^+$ mit $\|v_{n+1}\|_V = 1$ und

$$\inf\left\{\|v_{n+1} - w\|_V ; w \in V_n\right\} \geq \frac{1}{2} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^+. \tag{10.10}$$

Außerdem gilt $(K - \lambda_{n+1})\, v_{n+1} \in V_n$, weil $v_n = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{c}_i e_i$ und

$$(K-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{c}_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i (\lambda_i - \lambda_{n+1})\, e_i.$$

Für $m \leq n$ folgt wegen (10.10), dass

$$\begin{aligned}
&\left\| K v_{n+1} - K v_m \right\|_V \\
&= \left\| \lambda_{n+1} v_{n+1} + (K - \lambda_{n+1}) v_{n+1} - K v_m \right\|_V \\
&= |\lambda_{n+1}| \left\| v_{n+1} + \overbrace{\tfrac{1}{\lambda_{n+1}} \left((K - \lambda_{n+1}) v_{n+1} - K v_m \right)}^{\in V_n} \right\|_V \\
&\geq \frac{1}{2} |\lambda_{n+1}| \geq \frac{1}{2} \varepsilon. \qquad (10.11)
\end{aligned}$$

Weil K kompakt ist und $\|v_n\|_V \leq 1$, muss $\{K v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge haben und dies wird verhindert durch (10.11). Dies bedeutet, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}^+ 0$ nur endlich viele unterschiedliche Eigenwerte λ gibt mit $|\lambda| > \frac{1}{m}$. Dann kann man diese Eigenwerte abzählen; es gibt also höchstens abzählbar unendlich viele verschiedene Eigenwerte mit 0 als einzig möglichem Häufungspunkt.

3) Sei $\lambda \neq 0$. Wir definieren $\mathcal{K}_n := \operatorname{Ker}\left((K - \lambda I)^n \right)$. Weil K stetig ist, sind die Mengen $\mathcal{K}_n$ abgeschlossen und außerdem folgt direkt, dass

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_3 \subset \dots \qquad (10.12)$$

Wenn $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n+1}$, dann folgt für $v \in \mathcal{K}_{n+2}$, dass

$$(K - \lambda I) v \in \mathcal{K}_{n+1} = \mathcal{K}_n$$

und das bedeutet $v \in \mathcal{K}_{n+1}$ und in dem Fall gilt

$$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_m \text{ für alle } m \geq n.$$

Also nehmen wir an, dass $\mathcal{K}_n \subsetneq \mathcal{K}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man findet mit Lemma 10.3, dass $v_{n+1} \in \mathcal{K}_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}^+$ existiert mit $\|v_{n+1}\|_V = 1$ und

$$\inf \left\{ \|v_{n+1} - w\|_V ; w \in \mathcal{K}_n \right\} \geq \frac{1}{2} \text{ für } n \in \mathbb{N}^+. \qquad (10.13)$$

Dann gilt jedoch auch für $n \geq m$, dass

$$\begin{aligned}
&\left\| K v_{n+1} - K v_m \right\|_V \\
&= \left\| \lambda v_{n+1} + (K - \lambda I)(v_{n+1} - v_m) - \lambda v_m \right\|_V \\
&= |\lambda| \left\| v_{n+1} + \overbrace{\tfrac{1}{\lambda} (K - \lambda I)(v_{n+1} - v_m) - v_m}^{\in \mathcal{K}_n} \right\|_V \geq \frac{1}{2} |\lambda|.
\end{aligned}$$

Auch hier liefert das wieder einen Widerspruch zu der Kompaktheit von K. Für jedes $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$ existiert also eine Zahl $n_\lambda \in \mathbb{N}^+$ wie in 3) angegeben wurde.

4) Sei $\lambda \in \sigma_P(K) \setminus \{0\}$. Wir zeigen zuerst, dass

$$\operatorname{Ker}\left(\left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{n_\lambda} \right) \cap \operatorname{Range}\left(\left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{n_\lambda} \right) = \emptyset.$$

Nehme an v liegt in dieser Schnittmenge. Dann gilt

$$0 = \left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{n_\lambda} v \text{ und } v = \left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{n_\lambda} w$$

für irgendein $w \in V$. Es folgt

$$w \in \operatorname{Ker}\left(\left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{2 n_\lambda} \right)$$

und weil $\operatorname{Ker}\left(\left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{n} \right) = \operatorname{Ker}\left(\left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{n_\lambda} \right)$ für alle $n \geq n_\lambda$ findet man, dass

$$w \in \operatorname{Ker}\left(\left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{n_\lambda} \right)$$

und dann gilt $v = \left(I - \tfrac{1}{\lambda} K \right)^{n_\lambda} w = 0$.

Weil auch $\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}$ die Form „$I-$*kompakt*" hat, gilt wegen Theorem 10.4, dass

$$\begin{aligned} & \operatorname{codim}\left(\operatorname{Range}\left(I - \tfrac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}\right) \\ = & \dim\left(\operatorname{Ker}\left(I - \tfrac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}\right) < \infty. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Sei nun $n \geq n_\lambda$.Weil $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(I-K\right)^n\right)$ konstant ist für alle $n \geq n_\lambda$, gilt dies auch für $\operatorname{codim}\left(\operatorname{Range}\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right)^n\right)$ und weil $\operatorname{Range}\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right)^n \subset \operatorname{Range}\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}$, folgt also auch

$$\operatorname{Range}\left(I - \tfrac{1}{\lambda}K\right)^n = \operatorname{Range}\left(I - \tfrac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}.$$

Sowohl $\operatorname{Ker}\left(\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}\right)$ als auch $\operatorname{Range}\left(\left(I - \frac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}\right)$ sind Teilmengen von V, sie haben $\{0\}$ als Schnittmenge und dann folgt wegen (10.14), dass

$$V = \operatorname{Ker}\left(\left(I - \tfrac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}\right) \oplus \operatorname{Range}\left(\left(I - \tfrac{1}{\lambda}K\right)^{n_\lambda}\right).$$

Weil für $v \in \operatorname{Ker}\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)$ gilt, dass $Kv \in \operatorname{Ker}\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)$, denn

$$\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)Kv = K\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)v = 0,$$

und für $v \in \operatorname{Range}\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)$ gilt, dass

$$Kv \in \operatorname{Range}\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right),$$

denn

$$Kv = K\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)w = \left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)Kw,$$

sind $\operatorname{Ker}\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)$ und $\operatorname{Range}\left(\left(I-K\right)^{n_\lambda}\right)$ K-invariante Teilräume. ■

. . . .

Aufgabe 10.8 *Betrachte* $\left(C\left[-1,1\right], \|\cdot\|_\infty\right)$ *und* $K : C\left[-1,1\right] \to C\left[-1,1\right]$ *definiert durch*

$$\left(Ku\right)\left(x\right) = 2\int_0^x u\left(s\right)ds + \left(1-x\right)u\left(0\right).$$

1. *Zeigen Sie, dass* K *kompakt ist.*
2. *Zeigen Sie, dass* $1 \in \sigma_P\left(K\right)$.
3. *Gilt* $0 \in \sigma_P\left(K\right)$*?*
4. *Für welche* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist* $\left(K - \lambda I\right)u = f$ *lösbar für jedes* $f \in C\left[-1,1\right]$*?*

Aufgabe 10.9 *Wir betrachten $K : C[0,1] \to C[0,1]$ definiert durch*

$$(Kf)(r) := \int_0^1 \left(\min\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{s}\right) - 1 \right) \; s^2 \; f(s) \; ds.$$

1. *Zeigen Sie $K \in BL(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$.*
2. *Zeigen Sie, dass für alle $f \in C[0,1]$ sowohl $(Kf)'(r)$ als auch $(Kf)''(r)$ existiert für $r \in [0,1]$, und dass*
$$\left|(Kf)'(r)\right| \leq \|f\|_\infty r \text{ für } r \in [0,1].$$
3. *Zeigen Sie K ist kompakt.*
4. *Zeigen Sie, dass für $f \in C[0,1]$ gilt $(Kf)(1) = 0$ und*
$$-\left(\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(Kf)(r) = f(r) \text{ für } r \in (0,1)$$
5. *Zeigen Sie, dass $\varphi_1(r) = \frac{\sin(\pi r)}{r}$ die Eigenfunktion von K ist mit dem größten Eigenwert.*
6. *Zeigen Sie, dass $u(x) := (Kf)(|x|)$ eine Lösung ist von*
$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(|x|) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0), \end{cases}$$

mit

$$B_1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3; |x| < 1\right\},$$
$$\partial B_1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\right\}.$$

Hinweis: Für radialsymmetrische Funktionen in $\mathbb{R}^3$ und sphärische Koordinaten (r, θ, φ) gilt

$$\Delta = \left(\tfrac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \tfrac{2}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}.$$

Passen Sie auf bei 0.

7. *Zeigen Sie, dass Sie*

$$\begin{cases} (-\mu - \Delta)\, u(x) = f(|x|) & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0), \end{cases} \tag{10.15}$$

umschreiben können nach $(I - \mu K)\, u = Kf$.

8. *Für welche $\mu \in \mathbb{R}$ ist (10.15) lösbar?*

Kapitel 11

Sobolev Räume

Der erste Teil dieses Kapitels betrachtet Themen aus einer Vorlesung Analysis 3. Wir werden die wichtigsten Ergebnisse wiederholen, ohne auf die Beweise einzugehen.

11.1 Lebesgue Mengen

Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist, dann ist $B := \mathbb{R}^n \setminus A$ abgeschlossen. Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen und Schnittmengen von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen. Die Zahl der offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen spielt dabei keine Rolle. Anders wird das bei Schnittmengen von offenen Mengen und Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen. Wenn $\mathcal{O}_i$ für $i \in I$ offen sind, dann ist

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} \mathcal{O}_i$$

im allgemeinen nur offen, wenn I endlich ist. Wenn man zum Beispiel $\mathcal{O}_i = (-2^{-i}, 2^{-i})$ nimmt, so folgt $\bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i = \{0\}$. Man sucht eine Struktur für bestimmte relativ allgemeine Teilmengen von $\mathbb{R}$ derart, dass abzählbare Vereinigungen und Schnittmengen solcher Mengen auch wieder dazugehören. Dies führt zu der folgenden Definition:

Definition 11.1 *Eine Klasse $\mathcal{A}$ von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ nennt man eine σ-Algebra, wenn*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$ und $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$;*
2. *Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann gilt auch $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$;*
3. *Wenn $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, dann gilt auch $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.*

Die gröbste σ-Algebra ist $\{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$. Die feinste σ-Algebra ist Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Auch diese σ-Algebra ist nicht besonders nützlich. Wesentlich interessanter ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält und die Borel-σ-Algebra genannt wird. Wegen der zweiten Eigenschaft enthält diese letzte σ-Algebra auch alle abgeschlossenen Mengen. Trotzdem enthält sie nicht alle Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Definition 11.2 *Für $a_i \leq b_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \dots, n$ und*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n; a_i \leq x_i \leq b_i\} \tag{11.1}$$

*definiert man das **Prämaß** $\mu_n(B) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.*

In $\mathbb{R}$ liefert μ_1 die Länge eines Intervalls, in $\mathbb{R}^2$ liefert μ_2 den Flächeninhalt eines Rechtecks und in $\mathbb{R}^3$ liefert μ_3 das Volumen eines Quaders.

Theorem 11.3 *In $\mathbb{R}^n$ gibt es eine σ-Algebra $\mathcal{L}$, und eine Abbildung $\lambda : \mathcal{L} \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Alle offenen und also auch alle abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ gehören zu $\mathcal{L}$.*
2. *Für B wie in (11.1) gilt $\lambda(B) = \mu_n(B)$.*
3. *Wenn $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, dann gilt*

$$\lambda\left(\bigcup\nolimits_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}} \lambda(A_k).$$

4. *Wenn $A_0 \subset A_1 \in \mathcal{L}$ und $\lambda(A_1) = 0$, dann gilt $A_0 \in \mathcal{L}$ und $\lambda(A_0) = 0$.*

Eine Menge $A \in \mathcal{L}$ mit $\lambda(A) = 0$ nennt man eine **Nullmenge**.

Definition 11.4 *Man nennt $\mathcal{L}$ aus Theorem 11.3 die **Lebesgue-σ-Algebra** und λ das **Lebesgue-Maß**. Die Teilmengen in $\mathcal{L}$ nennt man die **Lebesgue-messbaren** Mengen von $\mathbb{R}^n$.*

Wenn wir genau die Lebesgue-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^n$ angeben wollen, dann schreiben wir $\mathcal{L}_n$. Weil alle offenen und alle abgeschlossenen und abzählbaren Schnittmengen und Vereinigungen dieser Mengen Lebesgue sind, kann man sich wundern, ob überhaupt Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ existieren, die nicht Lebesgue sind. Ja es gibt sie; ein konkretes Beispiel ist jedoch nicht einfach. Übrigens werden auch Lebesgue-messbare Funktionen definiert.

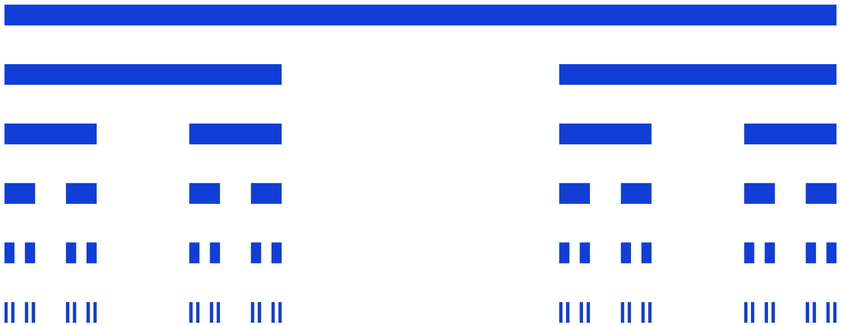
. . . .

Aufgabe 11.1 *Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \in \mathcal{L}_1$ und bestimmen Sie $\lambda(\mathbb{Q})$.*

Aufgabe 11.2 *Die Cantor-Menge ist definiert durch $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mit $A_0 = [0, 1]$ und für $k \in \mathbb{N}$*

$$A_{k+1} = A_k \setminus \bigcup_{n=0}^{3^k - 1} \left(\frac{3n+1}{3^{k+1}}, \frac{3n+2}{3^{k+1}}\right).$$

Die Menge C ist überabzählbar. Zeigen Sie, dass $C \in \mathcal{L}_1$ und bestimmen Sie $\lambda(C)$. Skizzen zu A_k stehen hier:



11.2 Lebesgue Integral

Um das Integral zu definieren braucht man noch ein paar Schritte. Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge ist, dann definiert man für die **Indikatorfunktion** $\mathbf{1}_A$ zu A, also

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in A, \\ 0 & \text{wenn } x \notin A. \end{cases}$$

Das Integral einer solchen Indikatorfunktion setzt man wie

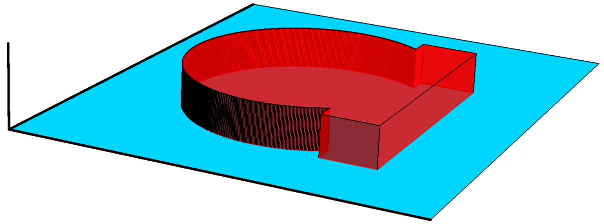


Abbildung 11.1: Skizze der Indikatorfunktion von $\subset \mathbb{R}^2$

folgt:

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A(x)\,dx = \lambda(A).$$

Als nächstes erweitert man dieses Integral für positive Linearkombinationen von Indikatorfunktionen:

Definition 11.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{L}$ und $A_k \subset \Omega$ mit $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nennt man **einfach**, wenn*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k \mathbf{1}_{A_k}(x) \tag{11.2}$$

für $f_k \in \mathbb{R}$ und man definiert für $f_k \geq 0$ das Integral

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k\ \lambda(A_k).$$

Bemerke, dass dieses Integral einen Wert in $[0,\infty]$ annehmen kann inklusive ∞. Weil jedoch alle Termen größer gleich 0 sind, ist

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} f_k\ \lambda(A_k) \tag{11.3}$$

wohldefiniert in $[0,\infty]$. Das ist auch der Grund, wieso man das Integral zuerst für positive Funktionen definiert. Lebesgue-integrierbar nennt man die Funktion f in (11.2) jedoch nur, wenn der Wert in (11.3) endlich ist.

....

Aufgabe 11.3 *Sei* $\mathbb{Q}=\{q_n; n\in\mathbb{N}\}$ *und* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$ *definiert durch* $f(q_n)=n$ *und* $f(x)=0$ *für* $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. *Berechnen Sie*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Aufgabe 11.4 *Sei* A_k *wie in Aufgabe 11.2 und sei*

$$g(x)=\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_k}(x).$$

Berechnen Sie

$$\int_{[0,1]} g(x)\,dx$$

Man kann dies nicht direkt für einfache Funktionen mit Vorzeichenwechsel machen, denn da könnte der Limes in (11.3) von der Anordnung der Mengen $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ abhängen.

Definition 11.6 (Das Lebesgue-Integral für nicht-negative Funktionen) *Sei* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *in* $\mathcal{L}$ *und* $f:\Omega\to[0,\infty)$. *Setze*

$$E_f^+ := \{g:\Omega\to[0,\infty) \text{ einfach und } g(x)\geq f(x)\},$$
$$E_f^- := \{g:\Omega\to[0,\infty) \text{ einfach und } g(x)\leq f(x)\}.$$

- *Wenn* $\ell<\infty$ *existiert mit*

$$\ell=\sup_{g\in E_f^-}\int_\Omega g(x)\,dx=\inf_{g\in E_f^+}\int_\Omega g(x)\,dx,$$

dann sagt man, f *ist* ***Lebesgue-integrierbar*** *und*

$$\int_\Omega f(x)\,dx := \ell.$$

- *Wenn* $\sup_{g\in E_f^-}\int_\Omega g(x)\,dx=\infty$, *dann setzt man*

$$\int_\Omega f(x)\,dx := \infty.$$

Wenn f kein festes Vorzeichen hat, dann definiert man das Integral für die nicht-negativen Funktionen

$$f^+(x)=\max(0,f(x)) \text{ und } f^-(x)=\max(0,-f(x)),$$

und nennt f Lebesgue-integrierbar, wenn f^+ und f^- es sind. In dem Fall setzt man

$$\int_\Omega f(x)\,dx=\int_\Omega f^+(x)\,dx-\int_\Omega f^-(x)\,dx.$$

Bemerkung 11.6.1 *Die Klasse der einfachen Funktionen enthält die Treppenfunktionen, die man beim Riemann-Integral verwendet hat. Weil sonst die Konstruktion ähnlich ist, bedeutet das, dass das Lebesgue-Integral allgemeiner ist. Außerdem, wenn eine Funktion Riemann-integrierbar ist auf Ω, dann ist die Funktion auch Lebesgue-integrierbar und die Werte beider Integrale sind gleich.*

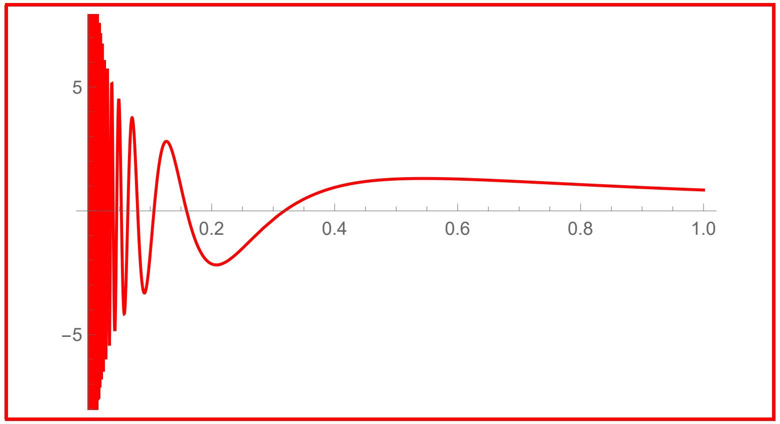
Dies gilt jedoch nicht für uneigentliche Riemann-Integrale. Durch die spezielle Approximation kann man da schlecht mit dem Lebesgue-Integral vergleichen.

. . . .

Beispiel 11.7 1. *Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) = \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}$$

ist nicht Riemann-integrierbar, weil nicht beschränkt, aber wohl Lebesgue- und uneigentlich Riemann-integrierbar.



2. *Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) = \frac{\sin(1/x)}{x}$$

ist nicht Riemann-integrierbar und nicht Lebesgue-integrierbar. Sie ist jedoch uneigentlich Riemann-integrierbar.

Wie beim Riemann-Integral zeigt man die folgenden elementaren Eigenschaften:

Lemma 11.8 *Sei $\Omega \in \mathcal{L}_n$ und seien f und g Lebesgue-integrierbar auf Ω.*

- *Dann ist auch $c_1 f + c_2 g$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar auf Ω und*
$$\int_\Omega (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int_\Omega f(x) dx + c_2 \int_\Omega g(x) dx.$$
- *Auch $|f|$ ist Lebesgue-integrierbar auf Ω und*
$$\left| \int_\Omega f(x)\, dx \right| \le \int_\Omega |f(x)|\, dx.$$
- *Wenn $\Omega_i \subset \Omega$ für $i = 1,2$ mit $\Omega_i \in \mathcal{L}_n$, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar auf Ω_i. Wenn $\lambda(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$, dann gilt*
$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x)\, dx = \int_{\Omega_1} f(x)\, dx + \int_{\Omega_2} f(x)\, dx.$$

- *Seien $\Omega_n \in \mathcal{L}_n$ mit $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n \subset \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $\lambda(\Omega_n) \to 0$ für $n \to \infty$, dann folgt*
$$\int_{\Omega_n} f(x)\,dx \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Definition 11.9 *Sei $\Omega \in \mathcal{L}$. Man definiert für Lebesgue-integrierbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$*
$$\|f\|_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega |f(x)|\,dx. \tag{11.4}$$

An sich ist $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$ jedoch noch keine Norm, sondern nur eine Seminorm. Aus $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 0$ folgt nämlich nur, dass
$$\lambda(\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}) = 0.$$

Das heißt, die Menge, wo $f(x)$ ungleich 0 ist, ist eine Nullmenge. Noch anders gesagt
$$f = 0 \text{ f.ü. in } \Omega. \tag{11.5}$$

Hier steht f.ü. für **fast überall** und das bedeutet genau, dass die Gleichung (11.5) gilt auf $\Omega \setminus A$ mit $A \subset \Omega$ irgendeine Nullmenge.

Lemma 11.10 *Sei $\Omega \in \mathcal{L}_n$. Definiere für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die Äquivalenzklasse*
$$[f] := \{g : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ g = f \text{ f.ü.}\}.$$

Sei $L^1(\Omega)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und die Norm wie in (11.4). Dann ist $\left(L^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}\right)$ ein normierter Vektorraum.

Eigentlich sollte man also $[f] \in L^1(\Omega)$ schreiben, statt $f \in L^1(\Omega)$.

Bemerkung 11.10.1 *Wenn für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega \in \mathcal{L}_n$ gilt, dass die Funktion*
$$x \mapsto \mathbf{1}_K(x)\ f(x)$$
Lebesgue-integrierbar ist, dann sagt man f ist lokal Lebesgue-integrierbar. Man schreibt $f \in L^1_{lok}(\Omega)$.

Der normierte Vektorraum $\left(L^1(\Omega), \|\cdot\|_{L^1(\Omega)}\right)$ ist sogar ein Banachraum.

- $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 0$ bedeutet $\int_\Omega |f(x)|\,dx = 0$ und das liefert $|f| = 0$ f.ü., also auch $f = 0$ f.ü. Dann liegt f in der Äquivalenzklasse von 0.
- Aus der Linearität in Lemma 11.8 folgt die Homogenität:
$$\|cf\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |cf(x)|\,dx = \int_\Omega |c|\,|f(x)|\,dx$$
$$= |c| \int_\Omega |f(x)|\,dx = |c|\,\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$
- Aus der Abschätzung in Lemma 11.8 folgt die Dreiecksungleichung:
$$\|f+g\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)+g(x)|\,dx$$
$$\leq \int_\Omega (|f(x)| + |g(x)|)\,dx = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\Omega)}.$$

Theorem 11.11 *Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ existiert $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Hier ist $C_c(\mathbb{R}^n)$ die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Der **Träger** [1] einer punktweise definierten Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ ist der Abschluss der Menge, wo sie ungleich 0 ist:

$$\operatorname{support}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Einen Beweis von Theorem 11.11 finden Sie bei Analysis 3 oder in einem Buch zu Maß- und Integrationstheorie und basiert meistens auf dem Theorem von Lusin. Siehe zum Beispiel [11, Theorem 3.14].

11.3 Eigenschaften des Integrals

Das Integral wurde für Lebesgue-messbare Gebiete in $\mathbb{R}^n$ definiert. Offene und abgeschlossene Mengen gehören dazu.

Eines der bekanntesten Ergebnisse für Integrale ist, dass man ein n-dimensionales Integral als wiederholtes Integral berechnen kann. Wir benutzen für die Formulierung $\mathcal{L}_n$ für die Lebesgue-messbaren Mengen in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 11.12 (Fubini-Tonelli) *Sei $\Omega \in \mathcal{L}_n$, sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar auf Ω und sei $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Dann gilt mit*

$$\Omega(x) := \left\{y \in \mathbb{R}^{n-m}; (x,y) \in \Omega\right\} \text{ für } x \in \mathbb{R}^m,$$

dass:

[1] support auf Englisch

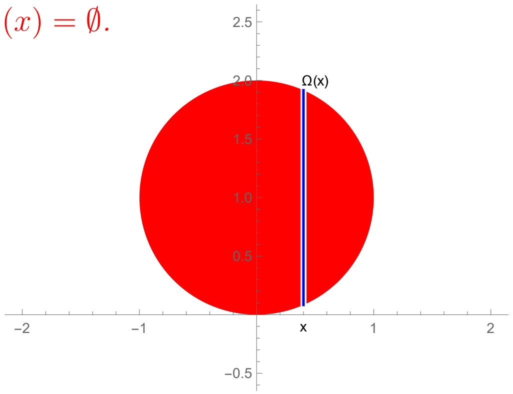
1. *Für $x \in \mathbb{R}^m$ f.ü. gilt $\Omega(x) \in \mathcal{L}_{n-m}$.*
2. *Für $x \in \mathbb{R}^m$ f.ü. ist die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ Lebesgue-integrierbar auf $\Omega(x)$.*
3. *Die Funktion $x \mapsto \displaystyle\int_{\Omega(x)} f(x,y)\,dy$ ist Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^m$.*
4. $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\Omega(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$

Hier haben wir mit x die ersten m Koordinaten notiert und mit y die letzten $n-m$. Selbstverständlich ist diese Auswahl beliebig. Auch kann man diesen Satz öfters anwenden, bis man nur noch eindimensionale Integrale hat.

Beispiel 11.13 *Sei $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y-1)^2 < 1\right\}$ und $f(x,y) = x^2 + y^2$. Dann findet man für $|x| < 1$, dass*

$$\Omega(x) = \left\{y \in \mathbb{R}; 1 - \sqrt{1-x^2} < y < 1 + \sqrt{1-x^2}\right\}$$

und für $|x| \geq 1$, dass $\Omega(x) = \emptyset$.



Für das Integral gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,y)\,d(x,y) &\overset{F.T.}{=} \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\Omega(x)}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[x^2y+\tfrac{1}{3}y^3\right]_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= \int_{-1}^{1}\tfrac{4}{3}\sqrt{1-x^2}\left(2+x^2\right)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\tfrac{4}{3}\left(\cos\varphi\right)^2\left(2+\left(\sin\varphi\right)^2\right)d\varphi\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\tfrac{1}{3}\left(8\left(\cos\varphi\right)^2+\left(\sin\left(2\varphi\right)\right)^2\right)d\varphi\\ &= \left(\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{6}\right)\pi = \tfrac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

Beispiel 11.14 *Betrachte die Funktionen $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$f_n(x) = n^2xe^{-nx}.$$

Es gilt $f_n(0) = 0$ und für $x > 0$ findet man

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\left(nx\right)^2e^{-nx}\\ &= \frac{1}{x}\lim_{t\to\infty}t^2e^{-t} = 0.\end{aligned}$$

Also

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

während

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n^2xe^{-nx}dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty ye^{-y}dy = \left[-\left(y+1\right)e^{-y}\right]_0^\infty = 1.\end{aligned}$$

Also gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$

Im letzten Beispiel sieht man, dass Integral und Limes im Allgemeinen nicht umzutauschen sind. Es gibt jedoch Bedingungen, die dafür sorgen, dass das Resultat beim Umtausch gleich bleibt.

Theorem 11.15 (Monotone Konvergenz)
Seien $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbare Funktionen. Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \textit{f.ü. auf } \Omega,$$

und $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert punktweise f.ü., dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \in (-\infty,\infty]\,.$$

Der Wert ∞ ist hier möglich, und in dem Fall nennt man $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ nicht Lebesgue-integrierbar.

Theorem 11.16 (Majorisierte Konvergenz)
Seien $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbare Funktionen. Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$|f_n| \leq g \quad \textit{f.ü. auf } \Omega,$$

und $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert punktweise f.ü., dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

11.4 Lebesgue-Räume

In diesem Abschnitt nehmen wir für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, also eine offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Weil Ω offen ist, gilt $\Omega \in \mathcal{L}_n$.

Definition 11.17 **($L^p(\Omega)$-Seminorm)**

- *Für $p \in (1,\infty)$ definiert man*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

- *Für $p = \infty$ definiert man*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}\,\{m \in \mathbb{R}; \lambda\{x \in \Omega; |u(x)| > m\} \neq 0\}.$$

Proposition 11.18 **(Hölder-Ungleichung)**
Sei $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ gilt $uv \in L^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{11.6}$$

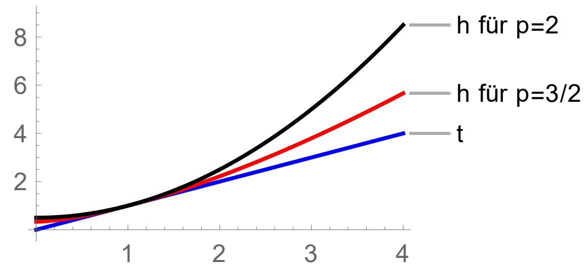
Beweis. Wir zeigen erst, dass für $a, b > 0$ die Ungleichung von Young gilt:

$$ab \le \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q. \tag{11.7}$$

Diese Ungleichung ist mit $t = ab^{1-q} > 0$ äquivalent zu

$$t \le \tfrac{1}{p}t^p + \tfrac{1}{q} = 1 + \tfrac{1}{p}(t^p - 1). \tag{11.8}$$

Die Funktion $h(t) = 1 + \frac{1}{p}(t^p - 1)$ ist konvex für $p \ge 1$ und weil $h(1) = 1$ und $h'(1) = 1$ gilt (11.8) für $t \ge 0$.



Mit (11.7) folgt

$$\begin{aligned}\|uv\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \\ &\le \frac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p\, dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v(x)|^q\, dx \\ &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\|v\|^q_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Wenn $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ oder $\|v\|_{L^q(\Omega)}$ gleich 0 ist, wird der Beweis trivial. Nehmen wir also an, dass $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ und $\|v\|_{L^q(\Omega)}$ nicht gleich 0 sind. Dann können wir u durch $u/\|u\|_{L^p(\Omega)}$ ersetzen und v durch $v/\|v\|_{L^q(\Omega)}$ und finden:

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{u}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}\frac{v}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}\right\|_{L^1(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{p}\left\|\frac{u}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}\right\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q}\left\|\frac{v}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}\right\|^q_{L^q(\Omega)} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $\|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}$ folgt (11.6). ■

Proposition 11.19 **(Minkowski-Ungleichung)**
Seien $u, v \in L^p(\Omega)$ für $p \in [1,\infty]$. Dann gilt

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{11.9}$$

Beweis. Für $p \in \{1,\infty\}$ zeigt man die Ungleichung sofort. Für

$p \in (1, \infty)$ geht man wie folgt vor:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_\Omega |u(x)+v(x)|^p \, dx \\ \le \int_\Omega |u(x)| \, |u(x)+v(x)|^{p-1} \, dx \, + & \\ \int_\Omega |v(x)| \, |u(x)+v(x)|^{p-1} \, dx &= \end{aligned} \tag{11.10}$$

und wenn wir hier Hölder verwenden, folgt, weil $q(p-1) = p$, dass (11.10)

$$\begin{aligned} &\le \|u\|_{L^p(\Omega)} \left\| |u+v|^{p-1} \right\|_{L^q(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \left\| |u+v|^{p-1} \right\|_{L^q(\Omega)} \\ &= \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \right) \|u+v\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} . \end{aligned}$$

Nach Division durch $\|u+v\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}$ folgt (11.9). ■

Die Ungleichung von Minkowski hier ist die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Die Homogenität der Norm folgt direkt und so hat man, dass $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)} \right)$ für jedes $p \in [1, \infty]$ ein normierter Vektorraum ist auf der Menge der Äquivalenzklassen von Funktionen u mit $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$.

In Theorem 11.11 findet man, dass $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Dies gilt sogar für $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in [1, \infty)$. Für $p = \infty$ gilt dies nicht.

. . . .

Aufgabe 11.5 *Zeigen Sie, dass $C_c(\mathbb{R}^n)$ nicht dicht liegt in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Lemma 11.20 *Sei $p \in (1, \infty)$. Dann existiert für jede Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Betrachte $f_r := f \, \mathbf{1}_{B_r(0)}$. Weil $|f - f_r| \le 2|f|$ gilt, folgt mit majorisierter Konvergenz, dass

$$\lim_{r \to \infty} \|f - f_r\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

und es gibt r_0 so, dass

$$\|f - f_{r_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{11.11}$$

Als nächstes definieren wir für $M \in \mathbb{R}^+$ die Abschneidefunktion a_M durch

$$a_M(s) := \begin{cases} M & \text{für} \quad s > M, \\ s & \text{für} \quad |s| \le M, \\ -M & \text{für} \quad s < -M. \end{cases}$$

Wir betrachten $f_M := a_M \circ f_{r_0}$ und finden, wiederum mit majorisierter Konvergenz, dass

$$\lim_{M \to \infty} \|f_{r_0} - f_M\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0,$$

und es gibt also M_0 so, dass

$$\|f_{r_0} - f_{M_0}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \tag{11.12}$$

Es folgt, dass $\|f_{M_0}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda(B_{r_0}(0))\, M_0$ und also $f_{M_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wegen Theorem 11.11 kann man f_{M_0} mit Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^n)$ in $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$-Norm approximieren. Sei $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ derart, dass

$$\|f_{M_0} - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \left(\tfrac{1}{6M_0}\varepsilon\right)^p.$$

Wir dürfen annehmen, dass $|g(x)| \leq M_0$, oder sonst g ersetzen durch $a_{M_0} \circ g$. Es folgt dass

$$\begin{aligned}\|f_{M_0} - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_{M_0}(x) - g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \\ &\leq \left((2M_0)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f_{M_0}(x) - g(x)| \, dx\right)^{1/p} \\ &\leq 2M_0 \|f_{M_0} - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/p} < \tfrac{1}{3}\varepsilon. \qquad (11.13)\end{aligned}$$

Kombiniert man die drei nummerierten Abschätzungen mit der Dreiecksungleichung, dann folgt $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. ■

Theorem 11.21 (Riesz-Fischer für $p \in [1,\infty)$) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\right)$ ein Banachraum.*

Auch $\left(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}\right)$ ist ein Banachraum. Der Beweis verlangt jedoch etwas mehr Kenntnisse von Maßtheorie.

Beweis. Wir werden es nur beweisen für $p \in [1,\infty)$. Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\right)$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$n, m \geq n_\varepsilon \implies \|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon.$$

Nehmen wir $\varepsilon = 2^{-k}$, so kann man eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ finden, mit

$$\left\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\right\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{-k}$$

Betrachten wir

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|.$$

Wegen Minkowski gilt

$$\begin{aligned}\|g_m\|_{L^p(\Omega)} &= \left\|\sum\nolimits_{k=1}^{m} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|\right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \sum\nolimits_{k=1}^{m} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1\end{aligned}$$

und das bedeutet $g_m(x)$ ist eine wachsende Folge, die fast überall beschränkt ist, also fast überall punktweise konvergiert zu einer Funktion g. Wegen monotoner Konvergenz folgt

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega g_m(x)^p \, dx = \int_\Omega \lim_{m\to\infty} g_m(x)^p \, dx = \int_\Omega g(x)^p \, dx$$

und

$$\|g\|_{L^p(\Omega)} = \lim_{m\to\infty} \|g_m\|_{L^p(\Omega)} \leq 1.$$

Es gilt

$$f_{n_m}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$$

und weil die Reihe fast überall absolut konvergiert, existiert $f(x) := \lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x)$ fast überall. Weil

$$|f_{n_m}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + g(x) \text{ f.ü.}$$

folgt

$$\|f_{n_m}\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|f_{n_{k+1}}\right\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} .$$

Wegen majorisierter Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \int_\Omega |f_{n_m}(x)|^p \, dx &= \int_\Omega \lim_{m\to\infty} |f_{n_m}(x)|^p \, dx \\ &= \int_\Omega |f(x)|^p \, dx\end{aligned}$$

und $f \in L^p(\Omega)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \int_\Omega |f_{n_m}(x) - f(x)|^p \, dx \\ &= \int_\Omega \lim_{m\to\infty} |f_{n_m}(x) - f(x)|^p \, dx = 0.\end{aligned}$$

Für $n \in [n_m, n_{m+1}]$ gilt

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|f_n - f_{n_m}\|_{L^p(\Omega)} + \|f_{n_m} - f\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq 2^{-m} + \|f_{n_m} - f\|_{L^p(\Omega)} ,\end{aligned}$$

also nicht nur die Teilfolge $\{f_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert sondern auch $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Aufgabe 11.6 *Beweisen Sie die Dreiecksungleichung (Minkowski) für die Norm in* $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ *mit* $p \in (1,\infty)$.

Aufgabe 11.7 *Beantworten Sie für welche* $p \in [1,\infty]$ *und* $n \in \mathbb{N}^+$ *gilt* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*?*

1. $f(x) = \frac{1}{1+|x|^2}$.
2. $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|^2}$.
3. $f(x) = \frac{1}{|x|\left(1+|x|^2\right)}$.

11.5 Schwache Ableitungen

Man möchte auch Ableitungen in der Klasse $L^p(\Omega)$ definieren. Da die Standard-Ableitungen punktweise definiert sind und

$L^p(\Omega)$ nicht mal Funktionen sondern Funktionenklassen enthalten, deren Werte auf Nullmengen irrelevant sind, muss man Ableitungen neu angehen. Die Idee, die man dazu verwendet, beruht auf partieller Integration. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, dass

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Der Vektorraum $C_c^\infty(\mathbb{R})$ besteht aus allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

Definition 11.22 *Sei $f \in L^1_{lok}(\Omega)$. Man sagt, dass f* ***schwach nach*** *x_i* ***differenzierbar*** *ist auf Ω, wenn $g_i \in L^1_{lok}(\Omega)$ existiert derart, dass*

$$\int_\Omega g_i(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)dx \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Bemerkung 11.22.1
- *Wenn die Funktion f eine klassische Ableitung auf Ω hat, dann hat sie auch eine schwache Ableitung auf Ω. Punktweise definiert ist so eine schwache Ableitung nicht, denn sie ist ja keine Funktion, sondern eigentlich eine Funktionenklasse.*
- *Wenn f eine klassische Ableitung auf Ω hat und g hat eine schwache Ableitung auf Ω, dann hat $f\,g$ eine schwache Ableitung auf Ω.*
- *Wenn f und g eine schwache Ableitung auf Ω haben, kann man ohne weitere Kenntnisse der betreffenden Funktionen keine Aussage machen bezüglich schwacher Differenzierbarkeit des Produkts.*

. . . .

Beispiel 11.23 *Die Funktion $f(x) = |x|$ hat $g(x) = \operatorname{sign}(x)$ als schwache Ableitung. Denn für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq M$ gilt*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x|\,\varphi'(x)dx &= \int_{-M}^{M} |x|\,\varphi'(x)dx \\
&= \int_0^M x\;\varphi'(x)dx - \int_{-M}^0 x\;\varphi'(x)dx \\
&= [x\varphi(x)]_0^M - \int_0^M \varphi(x)dx - [x\varphi(x)]_{-M}^0 + \int_{-M}^0 \varphi(x)dx \\
&= -\int_0^M \varphi(x)dx + \int_{-M}^0 \varphi(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Beispiel 11.24 *Die Funktion $g(x) = \operatorname{sign}(x)$ hat keine schwache Ableitung. Es gilt für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq M$, dass*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-M}^{M} \operatorname{sign}(x)\varphi'(x)dx \\
&= \int_0^M \varphi'(x)dx - \int_{-M}^0 \varphi'(x)dx \\
&= [\varphi(x)]_0^M - [\varphi(x)]_{-M}^0 = -2\varphi(0)
\end{aligned}$$

Es gibt keine $L^1_{lok}(\mathbb{R})$ Funktion h mit

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)dx = 2\varphi(0) \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Für jedes beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ findet man $h\varphi = 0$ f.ü. in I und weil dies für alle $\varphi \in C_c^\infty(I)$ gilt, folgt

$$h = 0 \text{ f.ü. in } I.$$

Weil $\{0\}$ auch eine Nullmenge ist, folgt

$$h = 0 \text{ f.ü. in } \mathbb{R}$$

und dann

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

ein Widerspruch für Funktionen φ mit $\varphi(0) \neq 0$.

Man kann die obige Definition von Ableitung auch für höhere Ordnung erweitern:

Definition 11.25 (Schwache Ableitungen)
Sei $f \in L^1_{lok}(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man sagt, dass f eine schwache Ableitung $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f := g_\alpha$ hat, mit Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$, wenn $g_\alpha \in L^1_{lok}(\Omega)$ existiert derart, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega g_\alpha(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi(x)dx.$$

. . . .

Aufgabe 11.8 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es $P := \{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ gibt mit $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(x_n, x_{n+1}] = \mathbb{R}$ derart, dass f stetig ist auf $\mathbb{R} \setminus P$.*

Zeigen Sie, dass wenn f stückweise stetig ist, eine schwache Ableitung hat, und

$$\ell_+ = \lim_{x\downarrow x_n} f(x) \text{ und } \ell_- = \lim_{x\uparrow x_n} f(x)$$

existiert, dann folgt $\ell_+ = \ell_-$.

Hinweis: Bemerke dass $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ keine Häufungspunkte hat und es deshalb $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon) \cap \{x_n; n \in \mathbb{Z}\} = \{x_n\}.$$

Verwenden Sie eine Testfunktion φ mit $\varphi(x_n) = 1$ und

$$\text{support}(\varphi) \subset (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon).$$

Aufgabe 11.9 *Sei $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|^{-1}$, also*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

1. *Zeigen Sie, dass*
$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{-x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$
im Sinne von schwachen Ableitungen.
2. *Für welches* $p \in [1, \infty]$ *gilt* $f \in L^p(B_1(0))$*?*
3. *Für welches* $p \in [1, \infty]$ *gilt* $\frac{\partial}{\partial x_1} f \in L^p(B_1(0))$*?*

11.6 Definition Sobolevraum

Definition 11.26 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet, sei* $k \in \mathbb{N}$ *und* $p \in [1, \infty]$*. Man definiert* $W^{k,p}(\Omega)$ *als die Menge aller Funktionen(klassen)* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit*
$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| \le k.$$

Hier sind
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f$$
die schwachen Ableitungen von f. Sie liegen in $L^p(\Omega)$, wenn das zugehörige Integral in $\mathbb{R}$ existiert.

Proposition 11.27 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet, sei* $k \in \mathbb{N}$ *und* $p \in [1, \infty]$*. Dann ist* $\left(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\right)$ *mit*
$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u\right|^p dx\right)^{1/p} \tag{11.14}$$
ein normierter Vektorraum.

Diese normierten Vektorräume
$$\left(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\right) \tag{11.15}$$
heißen **Sobolevräume**. Sie sind sogar Banachräume.

Beweis. Die beiden ersten Eigenschaften für eine Norm sind für $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ direkt erfüllt. Der Beweis für die Dreiecksungleichung wird technischer als in Proposition 11.19, verwendet jedoch ähnliche Schritte. ■

Aufgabe 11.10 *Geben Sie eine Funktion an, mit*
$$f \in W^{1,2}(\Omega) \setminus L^3(\Omega).$$
Sie dürfen Ω *selber wählen.*

Aufgabe 11.11 *Nehme an $f, g \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.*

1. *Wenn zusätzlich gilt, dass $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, folgt dann, dass $fg \in W^{1,1}(\mathbb{R})$?*

2. *Wenn man nur $f, g \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ hat, folgt dann, dass $fg \in W^{1,1}(\mathbb{R})$?*

Kapitel 12

W und C

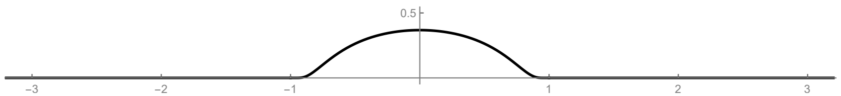
Mit W sind die Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$ gemeint und mit C die Schauder-Vektorräume $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ und Hölder-Räume $C^{k,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$.

12.1 Glätten mit Friedrichs

Zu der folgenden Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1, \end{cases}$$

gehört in einer Dimension diese Skizze:



Eine besondere Eigenschaft dieser Funktion ist, dass sie in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ liegt. Für $|x| \neq 1$ wird das keine Überraschung sein. Für $|x| = 1$ muss man jedoch begründen. Wenn man zu generalisierten sphärischen Koordinaten wechselt, das heißt, $(r,\omega) \in [0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ statt $x \in \mathbb{R}^n$, dann sieht man, dass nur die Ableitungen in der radialen Richtung problematisch sein könnten. Setzen wir

$$\tilde{\varphi}(r) := \varphi(r\omega) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{r-1}\right) & \text{für } r \in [0,1), \\ 0 & \text{für } r \in [1,\infty), \end{cases}$$

so folgt

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(r) = p_k\left(\frac{1}{r-1}\right)\exp\left(\frac{1}{r-1}\right) \quad \text{für } r \in (0,1)$$

mit p_k ein Polynom von Grad $k+1$. Dies beweist man direkt mit vollständiger Induktion. Es folgt

$$\lim_{r\uparrow 1} \tilde{\varphi}^{(k)}(r) = \lim_{t\to-\infty} p_k(t)\exp(t) = 0$$

und weil $\tilde{\varphi}^{(k)}(r) = 0$ für $r > 1$, folgt auch hier mit vollständiger Induktion, dass $\tilde{\varphi}^{(k)}$ stetig ist bei 1. Weil dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Wir skalieren diese Funktion zuerst wie folgt:

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,dy},$$

und anschließend zu

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi_1\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right). \tag{12.1}$$

Lemma 12.1 *Die Funktion $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ in (12.1) hat die folgenden Eigenschaften:*

1. support $(\varphi_\varepsilon) \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$;
2. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

Beweis. Die beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Konstruktion. ■

Lemma 12.2 *Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und definiere $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch*

$$f_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\,f(y)\,dy.$$

Dann gilt:

1. $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *für* $\varepsilon > 0$,
2. $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$ *für jedes* $x \in \mathbb{R}^n$,
3. $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{x\in K} |f_\varepsilon(x) - f(x)| = 0$ *für jede kompakte Menge* $K \subset \mathbb{R}^n$.

Wenn f gleichmäßig stetig ist, dann gilt sogar

4. $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|f_\varepsilon - f\|_\infty = 0$.

Beweis. 1. Weil der Träger von $\varphi_\varepsilon(x-\cdot)$ die beschränkte Menge $\overline{B_\varepsilon(x)}$ ist, ist das Integral wohl-definiert und die 0-te Ableitung existiert. Nehme an, die α-te Ableitung existiert. Dann folgt für eine nächsthöhere Ableitung $\alpha + e_i$, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f_\varepsilon(x+he_i) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f_\varepsilon(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi_\varepsilon(x+he_i-y) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y)}{h} f(y)\,dy = (12.2)
\end{aligned}$$

Weil jede Ableitung von φ_ε beschränkt ist und f stetig, sind die Differenzquotienten beschränkt und es gilt, dass

$$\begin{aligned}
(12.2) &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi_\varepsilon(x+he_i-y) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y)}{h} f(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y)\ f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Wegen vollständiger Induktion existiert für beliebige $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die α-te Ableitung von f_ε.

2. Dies folgt aus der Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\,f(y)\,dy - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{B_\varepsilon(x)} \varphi_\varepsilon(x-y)\left(f(y) - f(x)\right)dy\right| \\
&\le \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi_\varepsilon(x-y)\,|f(y) - f(x)|\,dy \\
&\le \|f(\cdot) - f(x)\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))} \int_{B_\varepsilon(x)} \varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \\
&= \|f(\cdot) - f(x)\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))}.
\end{aligned}$$

Weil f stetig ist, gilt $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|f(\cdot) - f(x)\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))} = 0$.

3. und 4. folgen, weil in beiden Fällen f gleichmäßig stetig ist. Einmal weil die betreffende Menge kompakt ist und einmal wegen der Annahme. Beides kombiniert mit 2. ■

Definition 12.3 *Für $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die **Konvolution** $u * v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wohldefiniert durch*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy,$$

wenn das Integral für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Konvolution wird auch Faltung genannt.

Für die Funktion f_ε von vorhin kann man also auch schreiben

$$f_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * f.$$

Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, dann kann man nicht ohne Weiteres eine Funktion $v \in C(\overline{\Omega})$ glätten durch $\varphi_\varepsilon * v$, denn dazu muss für jede Stelle $x \in \Omega$ die Funktion v auf $B_\varepsilon(x)$ definiert sein. Man könnte v außerhalb Ω durch 0 fortsetzen, jedoch würde $\varphi_\varepsilon * v$ nicht länger v approximieren in $x \in \partial\Omega$, wenn $v(x) \neq 0$.

Für den Raum $\left(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p\right)$ und sogar für $\left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right)$ mit $p < \infty$ hat man solche Probleme nicht. Wir schreiben zuerst die Ergebnisse auf ganz $\mathbb{R}^n$.

Lemma 12.4 *Sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Definiere $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch*

$$f_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Dann gilt:

1. *$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon > 0$,*
2. *$\|f_\varepsilon\|_p \le \|f\|_p$,*
3. *$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|f_\varepsilon - f\|_p = 0$.*

Beweis. 1. Die Bedingung $f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$ reicht für die wohldefiniertheit und auch für das Argument im Beweis von Lemma 12.2.1.

2. Erst für $p = 1$;

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)\, f(x-y)\, dy \right| dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)\, |f(x-y)|\, dy dx \\
&= \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\, dx dy \\
&= \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)\, dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_1
\end{aligned}$$

Für $p > 1$ benutzen wir die Ungleichung von Hölder und finden

$$\|f_\varepsilon\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)\, f(x-y)\, dy \right|^p dx$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)\, dy \right)^{p-1} \left(\int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)\, |f(x-y)|^p\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)\, |f(x-y)|^p\, dy dx$$

$$= \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p\, dx dy = \|f\|_p^p .$$

3. Theorem 11.11 und Lemma 11.20 sagen, dass für $p \in [1,\infty)$ der Vektorraum $C_c(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt in $\left(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p\right)$. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $p \in [1,\infty)$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon_0 > 0$ eine Funktion $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f-g\|_p < \varepsilon_0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - f\|_p &\le \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p + \|g-f\|_p \\ &\le \|g_\varepsilon - g\|_p + 2\|f-g\|_p \\ &\le \|g_\varepsilon - g\|_p + \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Der Träger K von g ist kompakt und dann sind auch die Träger von g_ε für $\varepsilon \in (0,1)$ kompakt und liegen alle in $\overline{K + B_1(0)}$. Setzen wir $M := \lambda\left(\overline{K + B_1(0)}\right)$ so gilt $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|g_\varepsilon - g\|_\infty = 0$ wegen Lemma 12.2. Weil

$$\|g_\varepsilon - g\|_p \le M^{1/p}\|g_\varepsilon - g\|_\infty.$$

folgt auch $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|g_\varepsilon - g\|_p = 0$. Weil wir $\varepsilon_0 > 0$ beliebig wählen können, folgt $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|f_\varepsilon - f\|_p = 0$. ∎

Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet ist, dann kann man $f \in L^p(\Omega)$ fortsetzen durch 0, das heißt

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Es gilt $\overline{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|\overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$. Approximiert man $\overline{f}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$-Norm mit $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, dann approximiert die Einschränkung von g zu Ω die Funktion f in $L^p(\Omega)$-Norm und

$$\|f - g_{|\Omega}\|_{L^p(\Omega)} \le \|\overline{f} - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

12.2 Spezielle Sobolevräume

Bei Differentialgleichungen hat man ohne Randbedingungen nur höchst selten die von Hadamard gewünschte eindeutige Lösung, wenn man nicht zusätzlich Anfangs- oder Randwerte festlegt. Für stetige und differenzierbare Funktionen u, die definiert sind auf $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, kann man u, beziehungsweise u und ∇u punktweise festlegen auf dem Rand $\partial\Omega$. Für Funktionen in $L^p(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ sind Ränder Nullmengen und Nullmengen zählen nicht. Das macht die Definition von Randbedingungen für Funktionen in $W^{k,p}(\Omega)$ zu einer etwas heiklen Sache.

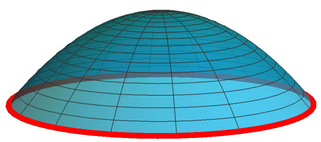
Zuerst definieren wir den Ersatz für die homogenen Dirichlet Randwerte. Zwei klassisch formulierte typische Randwertprobleme sind

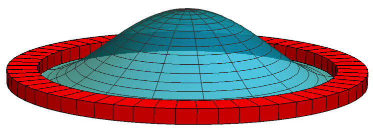
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = |\nabla u| = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Das erste Problem beschreibt die Auslenkung u einer Membran unter der Kraftdichte f, wenn diese Membran auf dem Rand $\partial\Omega$ festgehalten wird. Im zweiten Problem ist die Membran ersetzt durch eine dünne Platte, die am Rand eingeklemmt wird.





In diesen zwei Bildern finden Sie Lösungen u dieser beiden Randwerte für den Fall, dass $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $f(x) = 1$.

Um Dirchlet Randwerte in einem Sobolevraum anzugeben, verwendet man die Dichtheit in den Sobolevräumen von bestimmten C^∞-Funktionen.

Definition 12.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei $\left(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\right)$ wie in (11.15). Dann definiert man den Teilraum $W_0^{k,p}(\Omega)$ durch*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Hier ist $C_c^\infty(\Omega)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\text{support}(f) \subset \Omega.$$

Weil der Träger eine kompakte Menge ist und Ω offen, bedeutet das, dass solche Funktionen f in einer Umgebung des Randes $\partial\Omega$ gleich 0 sind.

Die Menge $W_0^{k,p}(\Omega)$ enthält also genau all die Funktionen $f \in W^{k,p}(\Omega)$, die man in $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$-Norm approximieren kann mit einer Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$.

. . . .

Wir betrachten in den folgenden Beispielen beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit einem relativ netten Rand, meistens Lipschitz oder C^∞. Wir nehmen immer an, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Rand eine kleinere Dimension hat:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lambda_n\left(\partial\Omega + B_\varepsilon(0)\right) = 0. \tag{12.3}$$

Die meisten Gebiete, die man sich vorstellt, erfüllen diese Bedingung.

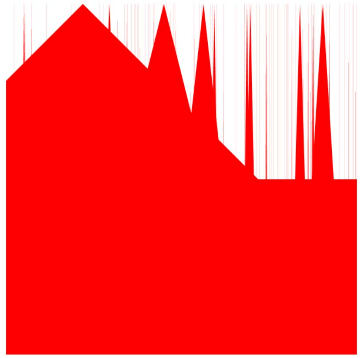
Es gibt jedoch widerliche Ausnahmen. Definiert man $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \max\left\{\max\left(1 - k^2|q_k - x|, 0\right); k \in \mathbb{N}^+\right\},$$

bei der $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap (0,2)$ ist, und nimmt man Ω wie folgt:

$$\Omega = \left\{(x,y);\ \begin{matrix} -1 < x < 1 \\ -1 < y < f(x) \end{matrix}\right\},$$

dann hat der Rand Hausdorff-Dimension 2 und die Bedingung (12.3) ist nicht erfüllt.



Beispiel 12.6 *Für alle $p \in [1,\infty)$ gilt*

$$W_0^{0,p}(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Aus der Definition vom Sobolevraum folgt $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Definiere die Indikatorfunktionen

$$\mathbf{1}_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \partial\Omega + B_\delta(0), \\ 1 & \text{für sonstige } x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Man findet mit majorisierter Konvergenz, dass

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \|f - f\,\mathbf{1}_\delta\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

also gibt es $\delta_0 > 0$ derart, dass

$$\|f - f\,\mathbf{1}_{\delta_0}\|_{L^p(\Omega)} < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{12.4}$$

Für den Träger der Funktion $f\,\mathbf{1}_{\delta_0}$ gilt

$$\inf\{|x-y|\,; x \in \operatorname{support}(f\,\mathbf{1}_{\delta_0}) \text{ und } y \in \partial\Omega\} \geq \delta_0.$$

Sei nun g die Erweiterung durch 0 von $f\,\mathbf{1}_{\delta_0}$ zu ganz $\mathbb{R}^n$. Für $\varphi_\delta * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\delta \in (0,\delta_0)$ folgt

$$\operatorname{support}(\varphi_\delta * g) \subset \Omega.$$

Also gilt für $\delta \in (0,\delta_0)$, dass $(\varphi_\delta * g)_{|\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$ und indem man $\delta \in (0,\delta_0)$ genügend klein nimmt, folgt mit Theorem 11.11 für $p=1$ oder Lemma 11.20 für $p \in (1,\infty)$, dass

$$\left\| f\,\mathbf{1}_{\delta_0} - (\varphi_\delta * g)_{|\Omega} \right\|_{L^p(\Omega)} < \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{12.5}$$

Mit (12.4), (12.5) und der Dreiecksungleichung folgt das Gewünschte.

Beispiel 12.7 *Für alle $p \in [1,\infty)$ und $n \in \mathbb{N}^+$ gilt, dass $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$u(x) = 1 - |x|^2$$

in $W_0^{1,p}(B_1(0))$ liegt.

Eine approximierende Folge kann man in zwei Schritten konstruieren:

1. *Man sorgt für ähnliche Funktionen jetzt mit einem Träger innerhalb des Gebietes:*

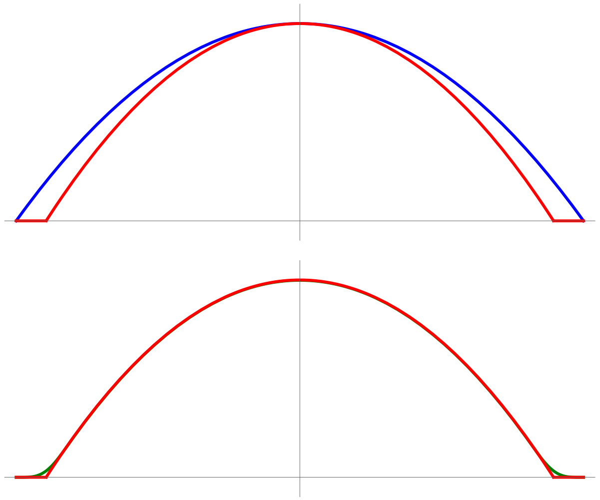
$$v_n(x) = \max\left(0, 1 - \left|\frac{n+1}{n}x\right|^2\right).$$

2. *Man glättet diese mit Friedrichs*

$$u_n(x) = \left(\varphi_{\frac{1}{2n}} * v_n\right)(x)$$

Für die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ gilt $\operatorname{support}(u_n) \subset B_{1-\frac{1}{2n}}(0)$, $u_n \in C^\infty(B_1(0))$ und

$$\|u_n - u\|_{L^p(B_1(0))} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$



Bei der Approximation auf ein beschränktes Gebiet haben wir gesehen, dass eine Bedingung an die Regularität des Gebiets gestellt wurde. Es ist nicht so sehr wichtig, welche Bedingung ausreicht oder sogar optimal ist, sondern die Tatsache, dass es eine Bedingung gibt. Es bedeutet nämlich, dass, wenn man etwas Derartiges beweisen möchte, es sehr wahrscheinlich einige sehr technische Schritte braucht.

12.3 Hölder und Sobolev

In diesem Abschnitt ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega$ wir als unendlich glatt annehmen.

Definition 12.8 *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume mit $V \subset W$.*

- *Die Abbildung $I_e : V \to W$, definiert durch $I_e v = v$, nennt man eine* ***Einbettung****.*

Auch wenn jedes Element $v \in V$ einen Vertreter $\tilde{v} \in W$ hat, nennt man $I_e : V \to W$, definiert durch $I_e v = \tilde{v}$, eine Einbettung.

Wir sind interessiert an stetigen Einbettungen, das heißt, es gibt $C \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\|I_e v\|_W \leq C \|v\|_V \text{ für alle } v \in V.$$

Hier folgen einige triviale stetige Einbettungen:

Lemma 12.9 *Sei Ω wie oben.*

1. *Für $m + \gamma > k + \delta$ und*
$$\left(C^{m,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_{C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})}\right), \left(C^{k,\delta}\left(\Omega\right), \|\cdot\|_{C^{k,\delta}(\Omega)}\right).$$
ist die Einbettung $I_e : C^{m,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \to C^{k,\delta}(\Omega)$ stetig.

2. *Für $m \geq k$ und*
$$\left(C^{m,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_{C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})}\right), \left(W^{k,p}\left(\Omega\right), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\right)$$
ist die Einbettung $I_e : C^{m,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right) \to W^{k,p}(\Omega)$ stetig.

3. *Für $m \geq k$ und $q \geq p$ und*
$$\left(W^{m,q}\left(\Omega\right), \|\cdot\|_{W^{m,q}(\Omega)}\right), \left(W^{k,p}\left(\Omega\right), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\right)$$
ist die Einbettung $I_e : W^{m,q}(\Omega) \to W^{k,p}(\Omega)$ stetig.

Bemerke, dass die Beschränkheit von Ω eine wesentliche Bedingung ist.

Mit Arzelà-Ascoli, Theorem 6.9, findet man sogar, dass die Einbettung I_e im ersten Punkt kompakt ist. Es folgt für $\gamma > 0$, dass auch die zweite Einbettung kompakt ist.

Beweis. Nur bei der dritten Behauptung und nur wenn $q > p$, muss man etwas Wesentliches zeigen, nämlich

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Für beschränkte Gebiete folgt dies aus der Hölder-Ungleichung wenn $q < \infty$:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\left(\int_\Omega 1 dx\right)^{1-p/q} \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^p\right)^{q/p} dx\right)^{p/q}\right)^{1/p} \\
&= \lambda(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Auch für Ableitungen folgt die ähnliche Abschätzung. ■

Es gibt jedoch auch stetige Einbettungen, die weit von trivial sind. Für diese Einbettungen definieren wir ein Index-Paar.

Definition 12.10 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und sei $p \in [1,\infty]$, $m \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in [0,1]$. Wir definieren den Regularitätsindex wie folgt:*

- $\#\left(C^{m,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)\right) := (m, m+\gamma)$;
- $\#\left(W^{m,p}(\Omega)\right) := \left(m, m - \frac{n}{p}\right)$ *für* $p < \infty$ *und* $\#\left(W^{m,\infty}(\Omega)\right) := (m,m)$.

Theorem 12.11 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Morrey) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\partial\Omega \in C^\infty$ und seien V und W Hölder- oder Sobolevräume $C^{m,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $W^{k,p}(\Omega)$. Wenn $\#(V) > \#(W)$, dann ist die Einbettung $I_e : V \to W$ stetig und sogar kompakt.*

Dieses Theorem ist eine Zusammenfassung vieler Theoreme, die teilweise sowohl auf unbeschränkten Gebieten gültig sind als auch auf Gebieten mit einem weniger glatten Rand. Die Beweise finden Sie in [1], [5] und [7].

Es reicht übrigens, wenn

$$\#(V)_1 \geq \#(W)_1 \text{ und } \#(V)_2 > \#(W)_2 .$$

Wenn beide Komponenten gleich sind, gibt es so keine Aussage zu einer Einbettung. Wenn $\#(V)_2 < \#(W)_2$, dann gibt es keine Einbettung.

....

Beispiel 12.12 *Zum Beispiel ist die Einbettung*

$$I_e : W^{2,2}(\Omega) \to C^0\left(\overline{\Omega}\right)$$

kompakt, wenn für die Dimension n gilt. dass $n \in \{1,2,3\}$. Es gilt nämlich, dass

$$\#\left(W^{2,2}(\Omega)\right) = \left(2, 2 - \frac{n}{2}\right) \text{ und}$$
$$\#\left(C^0\left(\overline{\Omega}\right)\right) = (0,0).$$

Es reicht aus, wenn $2 > 0$ und $2 - \frac{n}{2} > 0$. Das letztere bringt genau, dass $n < 4$ gelten soll für eine kompakte Einbettung.

Eine genaue Formulierung wäre übrigens, dass jede Funktionsklasse im Sobolevraum $W^{2,2}(\Omega)$ einen Vertreter hat, der in $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ liegt.

Literaturverzeichnis

[1] R.A. Adams, J.F. Fournier, John J. F. Sobolev spaces. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] H.W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, Springer, 6. Auflage, Heidelberg, 2011.

[3] A. Bressan, Lecture notes on functional analysis. With applications to linear partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, 143. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[4] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011.

[5] L.C. Evans, Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[6] P.D. Lax, Functional analysis. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 2002.

[7] G. Leoni, A first course in Sobolev spaces. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 181. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[8] A.E. Taylor, D.C. Lay, Introduction to functional analysis. Second edition. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1980.

[9] K. Yosida, Functional analysis. Second edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 123 Springer-Verlag New York Inc., New York 1968.

[10] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Functional analysis. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955.

[11] W. Rudin, Real and Complex Analysis, third edition, McGraw-Hill, 1986.

[12] M. Schechter, Principles of Functional Analysis, Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 36. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[13] A.C. Zaanen, Linear Analysis, North Holland Publishing, 1964

[14] E. Zeidler, Applied functional analysis. Main principles and their applications. Applied Mathematical Sciences, 109. Springer-Verlag, New York, 1995.

[15] E. Zeidler, Applied functional analysis. Applications to mathematical physics. Applied Mathematical Sciences, 108. Springer-Verlag, New York, 1995.