Существование главного собственного значения для кооперативных эллиптических систем в общей области

И. Бириనделли, Э. Митидиери, Г. Свирс

1. Введение. В работе изучается существование главной собственной функции для векторнозначной эллиптической задачи на собственные значения

$$\begin{cases} (\mathcal{L}-H)\Phi &= \lambda B\Phi \qquad \text{в } \Omega, \\ \Phi &= 0 \qquad \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

и ее связь с принципом максимума. Оператор $\mathcal{L}$ предполагается диагональной матрицей из равномерно эллиптических частных дифференциальных операторов в частных производных второго порядка, H и B — кооперативные матрицы с элементами из $C(\bar{\Omega})$. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ограничена. Мы не предполагаем, что граница удовлетворяет каким либо условиям регулярности.

Системы эллиптических и параболических дифференциальных уравнений возникают при изучении моделей динамики популяции, теории горения и проводимости нервов (см., например, обзор [3] и книгу [5]).

В вопросах существования, единственности и устойчивости решений таких систем эллиптические задачи на собственные значения играют важную роль (см. [1],[8], [15],[19]). С ними тесно связаны также принцип максимума и теоремы сравнения.

В большей части литературы по эллиптическим и параболическим системам (см. например [9],[10], [18],[23],[24],[26],[29],[30]) предполагается, что граница области Ω гладкая.

Без этого предположения возникают трудности даже в случае одного уравнения. Для одного уравнения в области без регулярности границы существуют по крайней мере два подхода. В областях, регулярных в смысле Перрона (см. [11]), непрерывные вплоть до границы решения могут быть определены с помощью предельного перехода. В общих областях самосопряженные задачи можно изучать в слабом смысле с помощью минимизации соответствующего функционала энергии.

Недавно в работе [6] (см. также [2], [20], [22]) изучена задача на собственные значения без каких-либо предположений о регулярности границы и без использования самосопряженности. Чтобы сделать это, пришлось определить, в каком смысле решение, не являющееся непрерывным в граничных точках, удовлетворяет граничным условиям. Оказывается, такое решение может быть получено процессом аппроксимации (см. определение ниже).

Векторнозначные эллиптические системы в общем случае не являются самосопряженными, даже если операторы второго порядка самосопряжены, поэтому подход работы [6] для скалярного уравнения кажется наиболее естественным для векторнозначных задач.

Эллиптические системы составляют широкий класс задач. Мы выделяем из них те, которые имеют свойства, характерные для одного уравнения. Это так называемые слабосвязанные и квазимонотонные системы, что будет разъяснено позднее.

Отметим кратко те трудности, которые возникают при отказе от гладкости границы области. Главным орудием, использованным в [6], так же как и в данной работе, является теорема Крейна-Рутмана. Для ее применения достаточно иметь строго положительный компактный разрешающий оператор (см. [1]). При отказе от регулярности границы доказательство компактности разрешающего оператора выглядит довольно трудным делом

*Э.Митидиери и Г.Свирс поддержаны EU, HCM Network contract nr. ERBCHRXCT930409 Reaction Diffusion Systems, MURST 40% и 60%.

даже для случая одного уравнения. Однако недавно в работе [7] предложено достаточно простое доказательство этого утверждения. Использованный там метод можно распространить на системы, что показано в данной работе. Результаты о регулярности решения в областях с гладкой границей, имеющей конечное число угловых точек, заинтересованный читатель может найти в работах [12] и [13].

В общем случае строгая положительность разрешающего оператора для систем уравнений не имеет места. Тем не менее из работы [21] следует, что условия теоремы Крейна-Рутмана о строгой положительности и компактности разрешающего оператора могут быть заменены на положительность, неприводимость и компактность. Рассматриваемые далее системы таковы, что их разрешающий оператор удовлетворяет последним условиям.

В работе [6] указано, в каком смысле удовлетворяются граничные условия для областей с негладкой границей. Для этого необходимо построить специальную функцию u_0 с помощью следующего предельного процесса, в котором участвуют область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ и эллиптический оператор L.

Пусть $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность гладких областей, аппроксимирующих Ω изнутри:

$$\Omega_j \subset \bar{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1} \subset \ldots \subset \Omega \text{ и } \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j = \Omega \tag{2}$$

и пусть $\tilde{c}$ — такое число, что $L1 + \tilde{c} \geq 0$. Наконец, пусть u_j обозначает решение задачи

$$\begin{cases} (L+\tilde{c})\, u_j &= 1 \quad \text{в } \Omega_j, \\ u_j &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_j. \end{cases}$$

Определим u_o как $u_o(x) = \lim_{j\to\infty} u_j(x)$ для $x \in \Omega$; из [6] следует, что $u_j \rightharpoonup u_o$ в $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ для любого p и $u_j \to u_o$ в $C^1_{loc}(\Omega)$.

Определение ([6]) *Пусть u_o — построенная выше функция. Решение u эллиптического уравнения $Lu = f$ (с подходящими предположениями о $L = -\sum a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$ и f) удовлетворяет нулевым граничным условиям Дирихле на $\partial\Omega$ в смысле BNV: $u \overset{u_o}{=} 0$ на $\partial\Omega$, если $\lim_{j\to\infty} u(x_j) = 0$ для каждой последовательности $x_j \to \partial\Omega$, такой что $u_o(x_j) \to 0$.*

В данной работе предполагается, что граничное условие, появляющееся в (1), удовлетворяется в подходящем BNV-смысле (см. определение 4 ниже).

Из замечания в [6, стр. 73] следует, что $u_o \overset{v}{=} 0$ на $\partial\Omega$ для любого $v \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$ с $v > 0$ и $Lv \geq 0$ в Ω. Поэтому выбор u_o не является ограничением.

Работа построена таким образом. В следующем разделе вводятся необходимые определения и формулируются основные результаты. Третий раздел содержит утверждения, которые будут использоваться для доказательства принципа максимума. В четвертом разделе доказывается главная теорема для систем (1), когда B есть единичная матрица. Наконец, используя результаты двух предыдущих разделов, в разделе 5 доказывается основная теорема. В последнем разделе для полноты формулируется теорема типа Крейна-Рутмана-De Pagter, которая подходит для наших целей.

2.Определения и основной результат. Следующие предположения используются на протяжении всей статьи.

- Множество Ω — ограниченное, открытое и связное подмножество $\mathbb{R}^N$.

- Оператор $\mathcal{L}$ является диагональной $k \times k$ матрицей эллиптических операторов L_μ $(1 \le \mu \le k)$
$$L_\mu := -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^\mu(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c^\mu(x), \tag{3}$$
удовлетворяющих, для некоторых положительных постоянных c_o, C_o, и b, и для всех $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^k$, условию
$$c_o|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^\mu(x)\,\xi_i\xi_j \le C_o|\xi|^2, \tag{4}$$
$$\begin{gathered} a_{ij}^\mu \in C(\Omega), \quad b_i^\mu,\ c^\mu \in L^\infty, \\ \left(\sum_{i=1}^{k}\left(b_i^\mu(x)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le b,\ |c^\mu(x)| \le b. \end{gathered} \tag{5}$$
- элементы матриц H и B размеров $k \times k$ принадлежат пространству $C\left(\bar{\Omega}\right)$.

Заметим, что не предполагается какой-либо регулярности $\partial\Omega$.

Пусть $p \in (1, \infty)$ и пусть $L^p(\Omega)$ — обычное пространство Лебега. Заметим, что $\left(L^p(\Omega)\right)^k$ можно отождествить с $L^p(\omega)$, где
$$\omega = (\underbrace{\Omega, \Omega, \ldots, \Omega}_{k \text{ раз}}). \tag{6}$$

Определение 1 (неравенства) *Пусть $D \subset \mathbb{R}^M$ — ограниченное открытое множество. Пусть функция $w \in L^p(D)$. Тогда*
1. *$w > 0$ если $w \ge 0$ п.в. в D и не является тождественным нулем;*
2. *$w \gg 0$ если $w_{|D^*} > 0$ на каждом открытом множестве $D^* \subset D$.*

Определение 2 (матрицы) *$k \times k$ матрица A с элементами $A_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ называется*
1. *положительной, если $A_{ij}(x) \ge 0$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ и $x \in \bar{\Omega}$;*
2. *кооперативной, если $A_{ij}(x) \ge 0$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ с $i \ne j$, и $x \in \bar{\Omega}$.*

Кооперативная матрица A называется
3. *полностью сплетенной, если матрица $\tilde{A} + I$ является неприводимой;*

элементы матрицы $\tilde{A}$ определяются равенством $\tilde{A}_{ij} = ||A_{ij}||_\infty$.

В литературе кооперативность известна также как существенная положительность или квазимонотонность ([24],[28]).

Определение 3 (суперрешения) *Функция $w \in \left(W_{loc}^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^k$, с $w > 0$ и $(\mathcal{L} - H)\, w \in \left(L^N(\Omega)\right)^k$, называется*
1. *суперрешением для оператора $\mathcal{L} - H$, если $(\mathcal{L} - H)w \ge 0$;*
2. *строгим суперрешением для $\mathcal{L} - H$, если $(\mathcal{L} - H)w > 0$;*
3. *сильным суперрешением $\mathcal{L} - H$, если $(\mathcal{L} - H)w \gg 0$.*

Далее, определим граничные условия в BNV-смысле. Пусть последовательность $\{\Omega_j\}$ состоит из гладких областей, аппроксимирующих Ω изнутри как в (2), и $M_\mu = L_\mu - c^\mu$. Пусть u_o^μ — предел функций u_j^μ, которые решают задачи $M_\mu u^\mu = 1$ в Ω_j и $u^\mu = 0$ на $\partial\Omega_j$.

Определение 4 (граничные условия Дирихле) *Пусть* u_o — *построенная выше функция. Функция* $u \in (C(\Omega))^k$ *удовлетворяет граничному условию Дирихле в BNV-смысле,* $u \overset{u_o}{=} 0$, *если для каждого* $\mu \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *и для каждой последовательности* $\{x^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \Omega$: $x^j \to \partial\Omega$, *следует, что* $\lim_{j \to \infty} u_o^\mu(x^j) = 0$ *влечет* $\lim_{j \to \infty} u^\mu(x^j) = 0$.

Сформулируем задачу на собственные значения, которая изучается в данной работе. Будем говорить, что $\Phi \in \left(W_{loc}^{2,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^k$ есть собственная функция (1), соответствующая собственному значению λ, если

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H)\,\Phi & = & \lambda B \Phi & \text{в } \Omega, \\ \Phi & \overset{u_o}{=} & 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично [6], положим

$$\lambda_0 = \sup\left\{\lambda; \exists w \in \left(W_{loc}^{2,N}(\Omega)\right)^k : \begin{array}{c} (\mathcal{L} - H)w \ \geq\ \lambda B w \\ \text{и} \quad w \gg 0 \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Для гладких областей при подходящих условиях на входящие операторы и для $B = I$ известно (см. [26]), что λ_0 есть первое собственное значение в обычном смысле.

Далее, заметим, что если B удовлетворяет $\sum_{j=1}^k B_{ij}(x) > 0$ для всех $1 \leq i \leq k$, то определение (8) тесно связано с неравенствами типа Барта ([4]). Именно, для всех $w \in (C^2(\Omega))^k$ с $w \gg 0$ имеем

$$\lambda_0 \geq \inf_{\substack{1 \leq i \leq k \\ x \in \Omega}} \frac{((\mathcal{L} - H)\,w)_i\,(x)}{(Bw)_i\,(x)}. \tag{9}$$

Главные результаты этой работы содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 5 *Пусть* $\Omega, \mathcal{L}, H, B$ *удовлетворяют указанным выше предположениям и пусть* λ_0 *определено в (8). Если*

a. существует положительное сильное суперрешение для $\mathcal{L} - H$;

b. H *кооперативна;*

c. H *является полностью сплетенной;*

d. B *кооперативна;*

e. $B_{ii}(x) > 0$ *для некоторого* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *и* $x \in \Omega$;

то

i. λ_0 — *положительное собственное значение, соответствующее сильно положительной собственной функции;*

ii. λ_0 *является единственным собственным значением, соответствующим положительной собственной функции, и его алгебраическая кратность есть* 1;

iii. нет собственных значений на $[0, \lambda_0)$.

Далее, рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} (\mathcal{L}-H)\,u &= \lambda Bu+f & \text{в } \Omega, \\ u &\overset{u_o}{=} 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 6 *Пусть выполнены предположения теоремы 5. Пусть $f \in (L^p(\Omega))^k$ с $f>0$ и пусть λ_0 определено из (8). Тогда:*

i. если $0 \le \lambda < \lambda_0$, то существует решение $u \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^k$ задачи (10) и $u \gg 0$.

Если B положительна, имеем:

ii. если $\lambda = \lambda_0$, то (10) не имеет решения для любого $f>0$;

iii. если $\lambda > \lambda_0$, то (10) не имеет положительного решения для любого $f>0$.

Замечание 6.1 Если в дополнение к условиям, наложенным в теореме 5, предположить, что B — положительная диагональная матрица ($B_{ij} \equiv 0$ для $i \ne j$ и $B_{ii} \ge 0$), то не существует собственных значений из $(-\infty, \lambda_0)$ и теорема 6.i. справедлива для всех $\lambda < \lambda_0$.
Замечание 6.2 Так как мы не делаем предположений о знаке c^μ, можно заменить c^μ на $c^\mu - \gamma$ и $H_{\mu\mu}$ на $H_{\mu\mu}+\gamma$. Следовательно, без ограничения общности можно предполагать, что $H_{\mu\mu} \ge 0$ (H положительно) или даже $H_{\mu\mu} \gg 0$.

Следствие 7 *Пусть выполнены условия теоремы 5 и $\sum_{j=1}^k B_{ij}(x) > 0$ для всех $1 \le i \le k$. Тогда*

$$\lambda_0 = \sup_{\substack{w\in(C^2(\Omega))^k \\ w\gg 0}} \ \inf_{\substack{1\le i\le k \\ x\in\Omega}} \frac{((\mathcal{L}-H)\,w)_i\,(x)}{(Bw)_i\,(x)}. \tag{11}$$

Данный результат получен в [4] для оператора Лапласа. Для более общих эллиптических уравнений второго порядка см. [23], [27], и для систем см. [26].
Доказательство. Обозначим выражение в правой части (11) через λ_{Barta}. Из (9) находим, что $\lambda_0 \ge \lambda_{\mathrm{Barta}}$. Используя первую собственную функцию, существование которой гарантировано теоремой 5, находим $\lambda_0 \le \lambda_{\mathrm{Barta}}$. □

3.Принцип максимума, подобласти и ненулевые граничные значения. Для эллиптических уравнений хорошо известно, что если разрешающий оператор для задачи Дирихле положителен на Ω, то это же верно для задачи Дирихле в любой подобласти $\Omega_s \subseteq \Omega$. Аналогичный результат справедлив для кооперативных систем.

Предложение 8 *Пусть $\Omega, \mathcal{L}, H$ удовлетворяют записанным выше предположениям. Предположим, что условия b. и c. теоремы 5 выполнены. Если существует $u_* \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^k$, такое что*

$$\begin{cases} (\mathcal{L}-H)\,u_* &\ge 0 & \text{в } \Omega, \\ u_* &\overset{u_{o,\Omega}}{=} 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

и $u_* \geq 0$ в Ω, то справедливы следующие утверждения.
Для каждого открытого множества $\Omega_s \subseteq \Omega$, с гладкой границей $\partial\Omega_s$, и $u \in \left(W^{2,N}(\Omega_s)\right)^k$, такой, что

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H)\, u & \geq & 0 & \text{в } \Omega_s, \\ u & \geq & 0 & \text{на } \partial\Omega_s, \end{cases} \tag{13}$$

выполняется соотношение $u \geq 0$ в Ω_s.

Замечание. Предположение, что H является полностью сплетенной на Ω, не предполагает, что $H_{|\Omega_s}$ также является полностью сплетенной на Ω_s. Это объясняет, почему мы требуем условие $u \geq 0$ в (13). Однако если H является полностью сплетенной на Ω_s, то можно усилить последнее утверждение: $u \equiv 0$ или $u \gg 0$ в Ω_s.
Доказательство. Заметим, что неравенство Като [16], которое можно использовать для $u_\mu \in W^{2,1}_{loc}(\Omega)$, и кооперативность H подразумевают, что в смысле распределений мы имеем

$$((\mathcal{L} - H)\min(u,0))_\mu = \mathcal{L}_\mu\left(\chi_{[u_\mu<0]}u_\mu\right) - \sum_j H_{\mu j}\left(\chi_{[u_j<0]}u_j\right) \geq$$

$$\geq \chi_{[u_\mu<0]}\mathcal{L}_\mu u_\mu - \sum_j H_{\mu j}\chi_{[u_j<0]}u_j = \chi_{[u_\mu<0]}\left((\mathcal{L} - H)\, u\right)_\mu + \sum_j H_{\mu j}\left(\chi_{[u_\mu<0]} - \chi_{[u_j<0]}\right) u_j \geq$$

$$\geq \sum_j H_{\mu j}\left(\chi_{[u_\mu<0]} - \chi_{[u_j<0]}\right) u_j = \sum_{j\neq\mu} H_{\mu j}\chi_{[u_\mu<0]}\chi_{[u_j\geq 0]}u_j - \sum_{j\neq\mu} H_{\mu j}\chi_{[u_\mu\geq 0]}\chi_{[u_j<0]}u_j \geq 0.$$

Следовательно $(\mathcal{L} - H)\min(u,0) \geq 0$ в Ω_s и $\min(u,0) = 0$ на $\partial\Omega_s$. Поскольку u_* является сильным положительным суперрешением на Ω_s для $\mathcal{L} - H$, из [26] следует, что на каждом полностью сплетенном подмножестве $\{1,\ldots,k\}$ имеем: $\min(u,0) \geq 0$ в Ω_s. Следовательно, $u \geq 0$ в Ω_s. □
Замечание. Предложение 8 будет использовано для доказательства теорем 5 и 6. Если бы эти теоремы были доказаны, можно было бы использовать их и доказать предложение 8 для $u \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega_s) \cap L^\infty(\Omega_s)\right)^k$ без требований гладкости $\partial\Omega_s$. Для того, чтобы проделать это, необходимо заменить граничное условие $u \geq 0$ на $\partial\Omega_s$ условием $\min(u,0) \overset{u_{o,\Omega}}{=} 0$ на $\partial\Omega_s$.

4.Случай $B = I$. Изучим специальный случай задачи (1), считая $B = I$ (единичная матрица). В этом разделе предполагаем, что условия *a.*, *b.* и *c.* теоремы 5 выполнены. Пусть

$$\kappa \geq \sup_{\mu,x}\left(\sum_{j=1}^k H_{\mu j}(x) - c^\mu(x)\right) \tag{14}$$

и введем оператор $\mathcal{L} - H + \kappa I$.

Лемма 9 *Пусть $\mathbf{e} = (1,\ldots,1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$ и пусть $\kappa > 0$ удовлетворяет (14). Если u_o функция, построенная в определении 4, то существует $u_e = (u_e^1, \ldots u_e^k) \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega)\right)^k$ такое, что*

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H + \kappa I)u_e & = & \mathbf{e} & \text{в } \Omega, \\ u_e & \overset{u_o}{=} & 0 & \text{на } \partial\Omega, \\ u_e & \gg & 0 & \text{в } \Omega. \end{cases}$$

Более того, $u_o \overset{u_e}{=} 0$ на $\partial\Omega$.

Замечание. Следствием приведенной выше леммы является то, что утверждения $u \overset{u_e}{=} 0$ на $\partial\Omega$ и $u \overset{u_o}{=} 0$ на $\partial\Omega$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность гладких областей, аппроксимирующих Ω изнутри (как в (2)), и пусть $u_{e,i} = (u^1_{e,i}, ...u^k_{e,i})$ — решение

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H + \kappa I)u_{e,i} &= \mathbf{e} \quad \text{в } \Omega_i, \\ u_{e,i} &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega_i. \end{cases} \tag{15}$$

Так как H является полностью сплетенной на Ω, то H является полностью сплетенной на всех Ω_i для всех достаточно больших i. Это означает, что можно применить теорему [26, теорема 1.1]. Как следствие получаем: $u_{e,i} \gg 0$ для всех больших i. Поскольку Ω ограничена, можем предполагать, что Ω лежит в полупространстве $\left\{x \in \mathbb{R}^N; x_1 > 0\right\}$. Положим $d_\mu = \sup_x(c^\mu - \sum_{i=1}^k H_{\mu i} + \kappa)$ и рассмотрим $\sigma \in R$ такое, что:

$$\sigma > \sup_{\mu,x} \frac{b_1^\mu + \sqrt{\left(b_1^\mu\right)^2 + 4a_{11}^\mu(1 + d_\mu)}}{2a_{11}^\mu}$$

и $v(x) := (e^{\sigma d} - e^{\sigma x_1})\mathbf{e}$, где d — диаметр Ω.

Имеем:

$$((\mathcal{L} - H + \kappa I)\, v)_\mu = \left(\sigma^2 a_{11}^\mu - b_1^\mu \sigma\right) e^{\sigma x_1} + \left(c^\mu - \sum_{j=1}^k H_{\mu j} + \kappa\right) \left(e^{\sigma d} - e^{\sigma x_1}\right) \geq$$

$$\geq \left(\sigma^2 a_{11}^\mu - b_1^\mu \sigma - d_\mu - 1\right) e^{\sigma x_1} + \left(c^\mu - \sum_{j=1}^k H_{\mu j} + \kappa\right) e^{\sigma d} + 1,$$

следовательно $(\mathcal{L} - H + \kappa I)\, v \gg 1$ и $(\mathcal{L} - H + \kappa I)(u_{e,i} - v) \ll 0$. Использование принципа максимума [26, теорема 1.1] дает $0 < u_{e,i} < v$.

В качестве следствия легко получаем: $u_{e,i} \to u_e$. Действительно, так как $\{u_{e,i}\,(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$, $x \in \Omega$, — ограниченная и возрастающая последовательность, то она сходится.

Выбирая $c^* \in \mathbb{R}$ таким, что

$$M_\mu u_e^\mu = (-\kappa - c^\mu)\, u_e^\mu + \sum\nolimits_{j=1}^k H_{\mu i} u_e^j + 1 \leq c^* 1,$$

получим $0 \leq u_e^\mu \leq c^* u_o^\mu$ и $u_e \overset{u_o}{=} 0$ на $\partial\Omega$. В силу результатов [6, с.73] это означает, что $u_o \overset{u_e}{=} 0$ на $\partial\Omega$. □

Лемма 10 *Пусть $f \in (L^\infty(\Omega))^k$. Тогда существует единственное $u \in \left(L^\infty(\Omega) \cap W^{2,N}_{loc}(\Omega)\right)^k$, такое что*

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H + \kappa I)u = f & \text{в } \Omega, \\ u \overset{u_o}{=} 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Далее, существует $C \in \mathbb{R}$ (независящее от u и f), такое что

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность открытых областей Ω_i, таких что $\Omega_i \subset \overline{\Omega}_i \subset \Omega_{i+1}$ и $\Omega = \cup_{i=1}^\infty \Omega_i$. Пусть u_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — решение

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H + \kappa I)u_i = f & \text{в } \Omega_i, \\ u_i = 0 & \text{на } \partial\Omega_i. \end{cases}$$

Рассуждения с использованием сравнения показывают, что

$$-z \le u_i \le z. \tag{17}$$

где $z := u_e \|f\|_{L^\infty}$. Следовательно, как в предыдущем доказательстве, имеем $u_i \to u$, где u — решение

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H + \kappa I)u = f & \text{в } \Omega, \\ u \overset{u_o}{=} 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Завершим доказательство, замечая, что граничное условие $u \overset{u_o}{=} 0$ на $\partial\Omega$ и (16) удовлетворяются в силу (17). Единственность следует из (16). $\square$

Предложение 11 *Пусть* $f \in \left(L^N(\Omega)\right)^k$. *Тогда существует единственное* $u \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^k$, *такое что*

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H + \kappa I)u = f & \text{в } \Omega, \\ u \overset{u_o}{=} 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{18}$$

Далее, существует C *(независящее от* u *и* f*), такое что*

$$\|u\|_{L^\infty} \le C \|f\|_{L^N} \tag{19}$$

и из $f > 0$ *следует* $u \gg 0$.

Доказательство использует идеи доказательства [26, теорема 1.1].

Доказательство. Заметим, что $(\mathcal{L} + \kappa I)$ — диагональная матрица равномерно эллиптических операторов. В силу выбора κ предположения [6, теорема 1.2] выполнены. Следовательно, оператор $(\mathcal{L} + \kappa I)^{-1}$, при граничных условиях в BNV-смысле (определение 4), определен в $L^N(\Omega)$.

Пусть $A := (\mathcal{L} + \kappa I)^{-1} H$ — разрешающий оператор задачи

$$\begin{cases} (\mathcal{L} + \kappa I)u = Hf & \text{в } \Omega, \\ u \overset{u_o}{=} 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

то есть $A(f) = u$.

- $A := (\mathcal{L} + \kappa I)^{-1} H$ *компактен и неприводим в* $(L^N(\Omega))^k$.

Действительно, из [7, предложение 1.1] следует, что $(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}$ — компактный оператор. Так как H ограничен, получаем компактность A.

Докажем, что A неприводим. Напомним, что A на $(L^N(\Omega))^k$ неприводим, если для любого измеримого множества $\mathsf{K} \subset \omega$, с $\mu(\mathsf{K}) > 0$ и $\mu(\omega \backslash \mathsf{K}) > 0$, множество

$$\left\{ f \in (L^N(\Omega))^k ; f_i(x) = 0 \text{ для всех } x \in \mathsf{K}_i,\ 1 \le i \le k \right\}$$

не является инвариантным относительно A.

В нашем случае, так как справедлив принцип максимума (см. [6]), каждый компонент $(\mathcal{L} + \kappa I)^{-1}$ неприводим. Используя тот факт, что H является полностью сплетенной (предполагаем $H_{ii} \ge 0$), получим, что A неприводим и положителен (см. [26, доказательство леммы 1.3]).

Теперь, используя результат из теоремы 18, имеем $r(A) > 0$.

• *Оператор* $(I-A)^{-1}$ *определен и* $(I-A)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}A^{\nu}$.

По теореме 17 $r(A)\,(>0)$ — собственное значение A и сопряженного A^*. Обозначим через ϕ и ψ соответствующие положительные собственные функции.

Рассмотрим функцию u_e, заданную в лемме 9. Напомним, что $u_e\gg 0$. Имеем $(\mathcal{L}+\kappa I)u_e=Hu_e+\mathbf{e}\gg Hu_e$, и тогда $u_e\gg(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}Hu_e$. Следовательно,

$$\langle\psi,u_e\rangle>\langle\psi,Au_e\rangle=\langle A^*\psi,u_e\rangle=r(A)\,\langle\psi,u_e\rangle$$

и $\langle\psi,u_e\rangle>0$. Это доказывает, что $r(A)<1$, откуда следует требуемое.

Для завершения доказательства заметим, что в силу предыдущих требований для любого $f\in(L^N(\Omega))^k$ существует u, такое что $u=(I-A)^{-1}(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}f$. Это эквивалентно равенству $u-(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}Hu=(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}f$, то есть

$$\begin{cases}(\mathcal{L}+\kappa I)u-Hu=f & \text{в } \Omega,\\ u\overset{u_o}{=}0 & \text{на } \partial\Omega.\end{cases}\tag{20}$$

Осталось доказать (19). Из леммы 10 и $r(A)<1$ следует

$$\|u\|_{\infty}\le\frac{M}{1-r(A)}\left\|(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}f\right\|_{\infty}.$$

С другой стороны, из обобщенной версии теоремы Александрова-Бакельмана-Пуччи (см. [11, теорема 9.1] и [6]) получаем

$$\left\|(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}f\right\|_{\infty}\le C\,\|f\|_{L^N}.$$

Наконец, так как H является полностью сплетенной, то для $f>0$ имеем $(I-A)^{-1}(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}f\ge A^k(\mathcal{L}+\kappa I)^{-1}f\gg 0$. Это завершает доказательство. □

Следствие 12 *Существует положительное собственное значение* λ_1 *задачи*

$$\begin{cases}(\mathcal{L}-H)\phi=\lambda_1\phi & \text{в } \Omega,\\ \phi\overset{u_o}{=}0 & \text{на } \partial\Omega,\end{cases}$$

с соответствующей собственной функцией $\phi\in\left(W^{2,N}_{loc}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)\right)^k$, $\phi\gg 0$.

Доказательство. Пусть $S_\kappa:=(\mathcal{L}-H+\kappa I)^{-1}$ в $\left(L^N(\Omega)\right)^k$ — обратный оператор, соответствующий граничным условиям, заданным в BNV-смысле (определение 4). S_κ положителен и неприводим, и в силу теорем вложения Соболева и неравенства (19) — компактен. Применение теоремы 16 (см. ниже) дает существование главного собственного значения μ оператора S_κ, соответствующего собственной функции $\phi>0$.

Следовательно, $\lambda_1=\frac{1}{\mu}-\kappa$ — главное собственное значение оператора $(\mathcal{L}-H)$, соответствующее собственной функции ϕ, такой что $\phi\gg 0$. Докажем, что $\lambda_1>0$.

По предположению существует сильное положительное суперрешение w задачи $(\mathcal{L}-H)$, то есть

$$(\mathcal{L}-H+\kappa I)\,w>\kappa w>0.\tag{21}$$

По предложению 11 функция $\tilde{w}=S_\kappa(\mathcal{L}-H+\kappa I)\,w$ удовлетворяет условиям: $\tilde{w}\in\left(W^{2,N}_{loc}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)\right)^k$ и $\tilde{w}\gg 0$. Рассмотрим последовательность $\{\Omega_i\}$ гладких областей, содержащихся в Ω и удовлетворяющих (2). Пусть $S_{\kappa,i} := (\mathcal{L} - H + \kappa I)^{-1}$ — резольвента оператора задачи (20), рассматриваемой на Ω_i. Из предложения 8 следует, что $w \geq S_{\kappa,i}(\mathcal{L} - H + \kappa I)w$ на Ω_i. Так как $S_{\kappa,i}(\mathcal{L} - H + \kappa I)w = S_{\kappa,i}(\mathcal{L} - H + \kappa I)\tilde{w} \to \tilde{w}$ для $i \to \infty$, находим, что $\tilde{w} \leq w$ на Ω и $\tilde{w} = S_\kappa(\mathcal{L} - H + \kappa I)w > \kappa S_\kappa w \geq \kappa S_\kappa \tilde{w}$ на Ω. Пусть μ обозначает главное собственное значение S_κ. Поскольку μ также главное собственное значение сопряженного оператора S_κ^*, соответствующее собственной функции ψ, то

$$0 < \kappa \langle \psi, S_\kappa \tilde{w} \rangle < \langle \psi, \tilde{w} \rangle = \frac{1}{\mu} \langle S_\kappa^* \psi, \tilde{w} \rangle = \frac{1}{\mu} \langle \psi, S_\kappa \tilde{w} \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает двойственность пространства $\left(L^N(\Omega)\right)^k$ и его сопряженного. Следовательно, $\lambda_1 = \frac{1}{\mu} - \kappa > 0$. □

Следствие 13 *Пусть $\lambda < \lambda_1$ и $f \in (L^N(\Omega))^k$. Тогда существует единственное $u \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^k$ такое, что*

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H)u &= \lambda u + f \qquad \text{в } \Omega, \\ u &\overset{u_o}{=} 0 \qquad\qquad \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Кроме того, если $f > 0$, то $u \gg 0$.

Доказательство. Для $\lambda = -\kappa$ результат следует из предложения 11. Ограничением на κ является только (14), поэтому результат справедлив для всех $\lambda \leq \kappa$. Для $\lambda \in (-\kappa, \lambda_1)$ можно действовать по аналогии с доказательством предложения 11. Действительно, заметим, что $\nu\left((\mathcal{L} - H + \kappa)^{-1}(\kappa + \lambda)\right) = (\lambda_1 + \kappa)^{-1}(\kappa + \lambda) < 1$ и $(\mathcal{L} - H + \kappa)^{-1}$ строго положительно, следовательно функция

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left((\mathcal{L} - H + \kappa)^{-1}(\kappa + \lambda)\right)^k (\mathcal{L} - H + \kappa)^{-1} f$$

определена и дает желаемое решение нашей задачи. □

5. Лемма Гесса, кооперативность B. Изучим существование положительного собственного значения λ_B с положительной собственной функцией Φ задачи

$$\begin{cases} (\mathcal{L} - H)\Phi = \lambda_B \, B\Phi \qquad \text{в } \Omega, \\ \Phi \overset{u_o}{=} 0 \qquad\qquad\qquad \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{22}$$

Предложение 14 *Пусть выполнены предположения а.-е. теоремы 5. Тогда существуют $\lambda_B > 0$ и $\Phi \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\right)^k$ с $\Phi \gg 0$, такие что выполнено (22).*

В доказательстве частично используются идеи работ [15] и [14].

Доказательство. Заметим, что без ограничения общности можем предполагать $B_{ii} > -1$ для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$. Рассмотрим $K_\alpha : \left(L^N(\Omega)\right)^k \to \left(L^N(\Omega)\right)^k$, заданный по формуле $K_\alpha = (\mathcal{L} - H + \alpha I)^{-1}(B + I)$, где $\alpha \geq 0$ и $(\mathcal{L} - H + \alpha I)^{-1}$, предполагая, что условия Дирихле заданы, как в определении 4. Из следствия 13 следует, что для любого $\alpha \geq 0$ оператор K_α определен, компактен, положителен и неприводим. □

Полезное свойство K_α содержится в следующей лемме.

Лемма 15 *Существует $\alpha > 0$ и $w \in \left(W^{2,N}_{loc}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)\right)^k$ с $w \gg 0$, такое что $\alpha K_\alpha w \geq w$.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \dots, k\}$, $\sigma > 0$ и пусть выбраны $\delta > 0$ и $x_0 \in \Omega$, такие что $\mathrm{B}_{\delta,x_0} \subset \Omega$ и $B_{ii}(x) \geq \sigma$ для $x \in \mathrm{B}_{\delta,x_0}$. Обозначим через B_{δ,x_0} множество $\left\{x \in \mathbb{R}^N; |x - x_0| < \delta\right\}$.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{cases} (L_i - H_{ii})\, v = \lambda v & \text{в } \mathrm{B}_{\delta,x_0}, \\ v = 0 & \text{на } \partial \mathrm{B}_{\delta,x_0}. \end{cases} \tag{23}$$

Прямые вычисления показывают, что $\left((\mathcal{L} - H)^{-1} \mathbf{e}\right)_i$ — положительное строгое суперрешение (23). Тогда оператор $T_i = \left((L_i - H_{ii})_{|\mathrm{B}_{\delta,x_0}}\right)^{-1}$, при граничных условиях Дирихле на B_{δ,x_0}, является положительным, компактным и неприводимым (в силу сильного принципа максимума). Следовательно, существует первое положительное собственное значение $\tilde{\lambda}$, соответствующее собственной функции $\tilde{\phi}$, оператора T_i. Продолжим $\tilde{\phi}$ нулем вне B_{δ,x_0}. Рассмотрим

$$\tilde{\Phi} = \underset{i^{th}\text{-entry}}{(0, \dots, \tilde{\phi}, \dots, 0)^{\mathsf{T}}}$$

и множество $w = \alpha K_\alpha \tilde{\Phi}$ с $\alpha = \tilde{\lambda}/\sigma$.

Мы утверждаем, что $\tilde{\Phi} \leq \alpha K_\alpha \tilde{\Phi}$. Действительно, так как $\tilde{\Phi} > 0$, получаем $w \gg 0$. Следовательно $(B + I)\, \tilde{\Phi} > (\sigma + 1)\, \tilde{\Phi}$ и

$$(\mathcal{L} - H + \alpha I)\left(w - \tilde{\Phi}\right) = \alpha\, (B + I)\, \tilde{\Phi} - \left(\tilde{\lambda} + \alpha\right) \tilde{\Phi} > 0 \quad \text{на } \mathrm{B}_{\delta,x_0}. \tag{24}$$

Заметим, что хотя сильный принцип максимума может быть неверным для системы на B_{δ,x_0} (эта система не обязательно полностью сплетена на подобласти Ω), покомпонентный сильный принцип максимума все же выполняется (см. предложение 8). Следовательно, (24) и $w - \tilde{\Phi} \gg 0$ на $\partial \mathrm{B}_{\delta,x_0}$ означают, что $w - \tilde{\Phi} \gg 0$ на B_{δ,x_0}. Кроме того, из того, что $w \gg 0 = \tilde{\Phi}$ на $\Omega \backslash \mathrm{B}_{\delta,x_0}$, получаем $\alpha K_\alpha \tilde{\Phi} \gg \tilde{\Phi}$ на Ω. Используя тот факт, что αK_α сильно положительный оператор, находим $\alpha K_\alpha w = (\alpha K_\alpha)^2\, \tilde{\Phi} \gg \alpha K_\alpha \tilde{\Phi} = w \gg \tilde{\Phi} > 0$. Это завершает доказательство. □

Доказательство предложения 14. Так как K_α компактен, положителен и неприводим, из теоремы 16 следует существование первого собственного значения $\frac{1}{\alpha_1} > 0$ оператора K_α, соответствующего собственной функции Φ_1, так что $\Phi_1 = \alpha_1 K_\alpha \Phi_1$. По лемме 15 существует $w > 0$, удовлетворяющее $\alpha K_\alpha w \geq w$. Поэтому $\frac{1}{\alpha_1} = r\,(K_\alpha) \geq \frac{1}{\alpha}$, где $r\,(K_\alpha)$ — спектральный радиус K_α.

Изменяя α, построим последовательность $(\alpha_n, \Phi_n)_{n \geq 1}$ с $\alpha_0 = \alpha$ такую, что для $n \geq 1$

$$\begin{cases} 0 < \alpha_n \leq \alpha_{n-1}; \\ \Phi_n = \alpha_n K_{\alpha_{n-1}} \Phi_n > 0 \text{ и } ||\Phi_n|| = 1. \end{cases}$$

Из последовательности $(\alpha_n, \Phi_n)_{n \geq 1}$ можно извлечь подпоследовательность, обозначим ее (α_n, Φ_n), такую что $\Phi_n \to \Phi$ и $\alpha_n \to \lambda > 0$ с $\Phi = \lambda K_\lambda \Phi$. Следовательно, $\Phi \overset{u_o}{=} 0$ на $\partial\Omega$ и

$$(\mathcal{L} - H + \lambda I)\, \Phi = \lambda\, (I + B)\, \Phi \;\Rightarrow\; (\mathcal{L} - H)\, \Phi = \lambda B \Phi.$$

То есть $\lambda = \lambda_B$ и доказательство завершено. $\square$

Замечание. Используя существование положительного суперрешения на первом шаге, мы получили значение λ, такое что $\Phi = \lambda K_\alpha \Phi$ с $\lambda \leq \alpha$, где равенство необязательно выполняется.

Доказательство теорем 5 и 6. Непосредственно получаем $\lambda_B = \lambda_0$. Используя функцию Φ из предложения 14, находим, что для всех $\lambda \in [0, \lambda_B)$ условия теоремы 5 выполняются для $(\mathcal{L} - H)$, замененного на $(\mathcal{L} - H - \lambda B)$. Применяя результаты раздела 3, где $B = I$, завершаем доказательство. $\square$

6.Результаты Крейна-Рутмана и De Pagter. Действительное векторное пространство с частичной упорядоченностью, скажем $(E, \geq)$, называется векторной решеткой, если $f, g \in E$ влечет, что $f \vee g \in E,$, где $f \vee g$, является наименьшей верхней гранью $\{f, g\}$. С введением нормы $(E, \geq, \|\cdot\|)$ решетка называется решеткой Банаха, если $(E, \|\cdot\|)$ — банахово пространство и $(E, \geq)$ — векторная решетка, такие что $|f| \leq |g|$ влечет $\|f\| \leq \|g\|$. Здесь $|f| = f \vee (-f)$. Множество $A \subseteq E$ называется идеальной решеткой, если $|f| \leq |g|$ и $g \in A$ означает $f \in A$. Положительный оператор $S \in L(E)$ называется неприводимым, если $\{0\}$ и E являются единственными замкнутыми решеточными идеалами, инвариантными относительно S.

Теорема 16 *Пусть E — банахова решетка с $\dim(E) > 1$ и пусть $T \in L(E)$ — положительный неприводимый компактный оператор. Тогда спектральный радиус r оператора T удовлетворяет $r > 0$ и существует $0 < \phi \in E$, такое что $T\phi = r\phi$. Более того, r — единственное собственное значение, соответствующее положительной собственной функции и это собственной значение алгебраически простое.*

Эта теорема является комбинацией известной теоремы Крейна-Рутмана [17] и важного результата De Pagter [21], который заменяет положительность спектрального радиуса оператора T на неприводимость. Это последнее условие является более легким для проверки. В $E = L^p(\omega)$ (с мерой Лебега и $1 \leq p < \infty$), где ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, замкнутый идеал имеет форму $\{f \in L^p(\omega); f = 0 \text{ п.в. на } \mathsf{K}\}$ (см. [25, с.158]). Это означает, что для положительного оператора S на E неприводимость эквивалента тому, что $M_{\chi_{\omega\setminus\mathsf{K}}} \circ S \circ M_{\chi_\mathsf{K}} \neq 0$ для каждого измеримого множества $\mathsf{K} \subset \omega$ с $\mu(\mathsf{K})$, $\mu(\omega\setminus\mathsf{K}) > 0$. Здесь оператор M_{χ_K} есть умножение на характеристическую функцию χ_K множества K. Для (компактных) ядерных операторов приведенная выше теорема известна как теорема Ентча. В данной работе $E = (L^p(\Omega))^k$ для $p \in (1, \infty)$. Заметим, что E может быть отождествленно с $L^p(\omega)$, где ω определено в (6).

Теорема 17 (Крейн-Рутман) *Пусть $T \in L(E)$ — компактный и положительный оператор со строго положительным спектральным радиусом r. Тогда существует $\varphi \in E$ с $\varphi > 0$ и $T\varphi = r\varphi$.*

Теорема 18 (De Pagter) *Пусть E — банахова решетка с $\dim(E) > 1$ и $T \in L(E)$ — компактный, положительный и неприводимый оператор. Тогда он имеет положительный спектральный радиус r.*

Остается доказать единственность в теореме 16. Так как T — положительный и компактный, то сопряженный $T' \in L(E')$ также положителен и компактен; он имеет тот же самый спектральный радиус $r > 0$. По Крейну-Рутману он имеет положительную собственную функцию $\phi \in E'$ с $T'\phi = r\phi$. Из теоремы V.5.2. из [25] следует, что φ является единственной собственной функцией T и кроме того, собственное значение r для T алгебраически простое.

Литература

[1] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces.* SIAM Rev. 18 (1976), no. 4, 620–709. (Errata in: SIAM Rev. 19 (1977), no. 4, vii.)

[2] A. Ancona, *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbb{R}^n$, London Math. Soc. (2) **34** (1986), 274-290.

[3] D. G. Aronson, H.F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetic, combustion, and nerve pulse propagation,* Partial differential equations and related topics (Program, Tulane Univ., New Orleans, La., 1974), pp. 5–49. Lecture Notes in Math., Vol. 446, Springer, Berlin, 1975.

[4] J. Barta, Sur la vibration d'une membrane, C.R. Acad. Sci. Paris **204** (1937), 472-473.

[5] J. Bebernes, D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory,* Applied Mathematical Sciences, 83, Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] H. Berestycki, L. Nirenberg, S. Varadhan, *The principal eigenvalue and maximum principle for second order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), 47–92.

[7] I. Birindelli, *Hopf's lemma and Anti-Maximum Principle in general domains*, J. Differ. Equations **119** (1995), 450-472.

[8] R. S. Cantrell, K. Schmitt, *On the eigenvalue problem for coupled elliptic systems*, SIAM J. Math. Anal. **17** (1986), 850-862.

[9] D. De Figueiredo, E. Mitidieri, *Maximum principles for cooperative elliptic systems*, C.R.Acad.Sci. Paris **310**, Série I (1990), 49-52.

[10] D. De Figueiredo, E. Mitidieri, *Maximum principles for linear elliptic systems*, Rend.Ist.Mat.Univ.Trieste **22** (1990), 36-66.

[11] Д.Гилбарг, Н.Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, М.: Наука, 1989.

[12] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston, 1985.

[13] P. Grisvard, *Edge behavior of the solution of an elliptic problem*, Math. Nachr. 132 (1987), 281–299.

[14] P. Hess and T. Kato, *On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), 999-1030.

[15] P. Hess, *On the eigenvalue problem for weakly-coupled elliptic systems,* Arch.Rat. Mech. Anal., **81** (1983), 151-159.

[16] T. Kato, *Schrödinger operators with singular potentials,* Israel J. Math **13** (1972), 135-148.

[17] М.Г. Крейн, М.А.Рутман, *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха*, УМН 3, вып.1, (1948), 3-95.

[18] E. Mitidieri, G. Sweers, *Weakly coupled elliptic systems and positivity*, Math. Nachr. **173** (1995), 259-286.

[19] R.D. Nussbaum, *Positive operators and elliptic eigenvalue problems*, Math. Z. **186** (1984), 247-264.

[20] R. D. Nussbaum and Y. Pinchover, *On variational principles for the generalized principal eigenvalue of second order elliptic operators and some applications,*. J.Anal. Math. **59** (1992), 161–177.

[21] B. de Pagter, *Irreducible compact operators*, Math. Z. 192 (1986), 149-153.

[22] R. G. Pinsky, *Positive Harmonic Functions and Diffusion*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[23] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *On the spectrum of general second order operators*, Bull. A.M.S. 72 (1966), 251-255.

[24] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer, New York 1967.

[25] H. H. Schaeffer, *Banach lattices and positive operators*, Springer, Heidelberg, 1974.

[26] G. Sweers, *Strong positivity in* $C(\bar{\Omega})$ *for elliptic systems*, Math. Z. **209** (1992), 251-271.

[27] M. Venturino, *Primo autovalore di operatori lineari ellittici in forma nonvariazionale,* Boll. U.M.I. **15**-B (1978), 576-591.

[28] W. Walter, *Differential- und Integral-Ungleichungen,* Springer, Berlin, 1964.

[29] W. Walter, *The minimum principle for elliptic systems*, Appl. Anal. **47** (1992), 1-6.

[30] H. F. Weinberger, *Some remarks on invariant sets for systems,* Pitman Research Notes in Math **173**, 1988, 189-207.

Isabeau Birindelli

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"
Piazzale Aldo Moro 5
00185 Roma
Italia

Enzo Mitidieri

Dipartimento di Scienze Matematiche
Università degli Studi di Trieste
Piazzale Europa 1
34100 Trieste
Italia

Guido Sweers

Department of Pure Mathematics
Delft University of Technology
PObox 5031
2600 GA Delft
The Netherlands