Über den Vergleich des Zinsrisikos mit dem biometrischen Risiko bei Lebensversicherungsprodukten

Marko Helwich
Fachbereich Mathematik
Universität Rostock

Kölner Versicherungsmathematisches Kolloquium, 14. Juni 2004

Vortragsinhalte

Einführung in das Thema

- Zur Modellierung eines allgemeinen Versicherungsgeschehens gehört (vgl. Milbrodt und Helbig [1999]) die Beschreibung
  - des versicherten Risikos,
  - der Versicherungszahlungen (Leistungen und Prämien),
  - der zeitlich koordinierten Bewertung der Zahlungen durch Verzinsung.
- Zentraler Begriff: Barwert $\hat{=}$ Summe aller auf den Vertragsbeginn diskontierten Zahlungen
- Barwerte von Versicherungszahlungen sind Zufallsgrößen $\longrightarrow$ versicherungstechnisches Risiko (Lebensversicherung: biometrisches Risiko),
  bei zufälliger Verzinsung (Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung) $\longrightarrow$ Zinsrisiko
- Voraussetzung: stochastische Unabhängigkeit beider Risikokomponenten

Die zentrale Fragestellung

Which is more important, interest or mortality?

Norberg [2001] (*On bonus and bonus prognoses in life insurance*) selbst dazu:

> Actuarial wisdom says it is interest. This is, of course, an empirical statement based on the fact that, in the era of contemporary insurance, mortality rates have been smaller and more stable than interest rates. Our model can add some other kind of insight. . . . The overall impression is that mortality is the more important element by term insurance, whereas interest is the (by far) more important by life annuity insurance.

- exemplarische Bestätigung in Arbeiten von Parker [1994], Marceau & Gaillardetz [1999], Olivieri [2001] und anderen, aber keine konkreten Ergebnisse
- weitere Fragestellung: Diversifizierbarkeit der Risikokomponenten

Begriffliche Klärung

- Spezifizierung der Risikokomponenten: Sowohl beim biometrischen als auch beim Zinsrisiko unterscheiden wir drei Arten (vgl. Farny [2000]).
  Diese sind
  - **das Zufallsrisiko:** besteht in der zufälligen Ausprägung der Merkmale trotz Kenntnis der verursachenden Gesetzmäßigkeiten (korrektes Modell)
  - **das Änderungsrisiko:** besteht darin, dass sich die verursachenden Gesetzmäßigkeiten mit der Zeit anders als modelliert verändern (ursprünglich korrektes Modell)
  - **das Irrtumsrisiko:** besteht in der Möglichkeit, dass die verursachenden Gesetzmäßigkeiten z. B. aufgrund ungenügender Datenlage falsch eingeschätzt wurden (Abweichung vom korrekten Modell)
- Zufalls- und Änderungsrisiko werden untersucht

Das Modell - versichertes Risiko

- $T_x \geq 0$ ist die zufällige zukünftige Lebensdauer einer VP mit Alter x zum Vertragsabschluss. Lebensdauerverteilung und Überlebensfunktion für $t \geq 0$

$$ {}_tq_x := P(T_x \leq t) \quad \text{und} \quad {}_tp_x := 1 - {}_tq_x $$

- ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer $K_x := \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbf{I}_{\{k<T_x\leq k+1\}}$
  - Mit versicherungstechnischem Eintrittsalter $x \in \mathbb{N}$,
  - Sterbetafeln $q_x := {}_1q_x = P(T_x \leq 1), \quad x = 0, \ldots, \omega$,
  - und der Stationaritätsbedingung

$$ {}_{s+t}p_x = P(T_x > s)P(T_x > s+t | T_x > s) = {}_sp_x\, {}_tp_{x+s} \quad s,t,x \geq 0 $$

gilt

$$ P(K_x = k) = \left[\prod_{i=1}^{k}(1 - q_{x+i-1})\right] q_{x+k}. $$

Das Modell - Verzinsung

- Eine Kapitalfunktion K ist eine monoton nichtfallende, rechtsseitig stetige Abbildung $K : [0,\infty) \to [1,\infty)$ mit $K(0) = 1$.
  - Bei kontinuierlicher Verzinsung mit Zinsintensität $\phi(s), s \geq 0$ gilt

$$ K(t) = e^{\Phi(t)} = e^{\int_0^t \phi(s)\, ds}, \quad t \geq 0. $$

  - Bei diskontinuierlicher Verzinsung mit Auszahlungen zum Jahresende und jährlichen Zinssätzen $\phi_s, s = 1, 2, \ldots,$ ist

$$ K(t) = \prod_{s=1}^{\lfloor t \rfloor}(1 + \triangle\Phi(s)) = \prod_{s=1}^{\lfloor t \rfloor}(1 + \phi_s), \quad t \geq 0. $$

- Die Diskontierungsfunktion v ist gegeben durch $v := \frac{1}{K}$.
- zufällige Verzinsung $\to$ Zinsintensität (Zinssätze) durch stochastische Prozesse modelliert (Gauß-Modelle)

Das Modell - Versicherungszahlungen

- Versicherungsperioden einjähriger Länge
- Zahlungen (konstante Zahlungshöhen) erfolgen nur am Anfang bzw. Ende des jeweiligen Jahres
- Portfolios bestehend aus c gleichartigen Versicherungsverträgen (z.B. nur Todesfallversicherungen)
- Berücksichtigung von Prämien, betrachte Portfolioverlust L (Zufallsgröße)

$$ L := \text{Leistungsbarwert} - \text{Prämienbarwert} $$

- individuelles Äquivalenzprinzip $\to$ $\mathbf{E}[L] = 0$
- stochastisch unabhängige ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauern $K_{x_i}, i = 1, \ldots, c$

- Portfolioverlust L in Cashflowschreibweise ($n = \max_i n_i$)

$$L = \sum_{k=0}^{n} CF_k \, v(k)$$

mit Diskontierungsfunktion v und zufälligen jährlichen Zahlungsströmen CF_k

$$CF_k = \sum_{i=1}^{c} A_i \, B_{(i,k)} \, C_{(i,k)} - \sum_{i=1}^{c} D_i \, E_{(i,k)} \, F_{(i,k)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Dabei sind für den i-ten Vertrag im Portfolio ($i = 1, \ldots, c$)

- A_i bzw. D_i die Leistungs- bzw. Prämienhöhe.
- $B_{(i,k)}$ bzw. $E_{(i,k)}$ von der ganzzahlig gestutzten zukünftigen Lebensdauer K_{x_i} abhängige Indikatorfunktionen, die Auskunft über den Zustand der versicherten Person im k-ten Laufzeitjahr geben (z.B. $\mathbf{I}_{(K_{x_i}=k)}$).
- $E_{(i,k)}$ bzw. $F_{(i,k)}$ deterministische Indikatorfunktionen, die angeben ob für das k-te Laufzeitjahr Zahlungen vertraglich festgelegt sind (z.B. Lauf-, Aufschubzeiten).

Beispiel zum Portfolioverlust

- Für ein Portfolio von c Leibrenten mit
  - jährlich vorschüssigen Leistungen $S_i^R, i = 1, \ldots, c,$
  - jährlich vorschüssigen Prämien $\pi_i, i = 1, \ldots, c,$
  - für $i = 1, \ldots, c$ Laufzeit $n_i \in \mathbf{N}$, Prämienzahlungszeit $k_i \in \mathbf{N}$ und Aufschubzeit $m_i \in \mathbf{N}$

  gestalten sich die zufälligen jährlichen Zahlungsströme folgendermaßen:

$$CF_k = \sum_{i=1}^{c} S_i^R \, \mathbf{I}_{(K_{x_i} \geq k)} \, \mathbf{I}_{(k_i+m_i \leq k < n_i)} - \sum_{i=1}^{c} \pi_i \, \mathbf{I}_{(K_{x_i} \geq k)} \, \mathbf{I}_{(k < k_i)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Dabei ist $n = \max_i n_i$ die Laufzeit des Portfolios.

Hauptreferenzen

- Parker [1997]: *Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks*, North American Actuarial Journal
  - Portfolio bestehend aus c gemischten Kapitalversicherungen, Einteilung in m Gruppen mit jeweils $c_j, j = 1, \ldots, m,$ identischen Verträgen
  - Betrachtung ohne Prämien $\longrightarrow$ Leistungsbarwert B des Portfolios
  - Cashflow- anstatt Policendarstellung des Leistungsbarwertes B
  - Varianz $V[B/c]$ als Risikomaßzahl für das Zufallsrisiko, Varianzzerlegung
  - Untersuchung der Diversifizierbarkeit nur unter der Zusatzvoraussetzung, dass bei wachsendem Portfolio die Anteile der Gruppen am Gesamtportfolio gleichbleiben (c_j/c unabhängig von c)
- Marceau & Gaillardetz [1999]: *On life insurance reserves in a stochastic mortality and interest rates environment*, Insurance: Mathematics and Economics
  - Portfolio gemischter Kapitalversicherungen unter Einbeziehung von Prämien

Vorschläge zur Untersuchung des Zufallsrisikos

- Parker [1997] berechnet für die zufällige Diskontierungsfunktion $v(k) = \exp\{-\Phi(k)\}$ den erwarteten durchschnittlichen Leistungsbarwert pro Police

$$\mathbf{E}\left[\frac{B}{c}\right] = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[CF_k\right] \mathbf{E}\left[e^{-\Phi(k)}\right]$$

und die Varianz desselben

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\left[\frac{B}{c}\right] &= \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \mathbf{E}\left[CF_k CF_s\right] \cdot \mathbf{E}\left[e^{-\Phi(k)} e^{-\Phi(s)}\right] \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \mathbf{E}\left[CF_k\right] \mathbf{E}\left[CF_s\right] \mathbf{E}\left[e^{-\Phi(k)}\right] \mathbf{E}\left[e^{-\Phi(s)}\right]. \end{aligned}$$

- Für die Varianz einer reellen Funktion Z zweier Zufallsgrößen X, Y gilt

$$\mathbf{V}\left[Z(X,Y)\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{V}\left[Z(X,Y)|X\right]\right] + \mathbf{V}\left[\mathbf{E}\left[Z(X,Y)|X\right]\right].$$

- Übertragung auf den durchschnittlichen Leistungsbarwert pro Police liefert

$$\mathbf{V}\left[\frac{B}{c}\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{V}\left[\frac{B}{c}\Big|\{\Phi(k)\}\right]\right] + \mathbf{V}\left[\mathbf{E}\left[\frac{B}{c}\Big|\{\Phi(k)\}\right]\right].$$

Dabei kann

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{V}\left[\frac{B}{c}\Big|\{\Phi(k)\}\right]\right] = \frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathbf{E}\left[e^{-\Phi(k)}e^{-\Phi(s)}\right]\mathbf{Cov}\left(CF_k, CF_s\right)$$

als Maßzahl für das biometrische Zufallsrisiko und

$$\mathbf{V}\left[\mathbf{E}\left[\frac{B}{c}\Big|\{\Phi(k)\}\right]\right] = \frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathbf{E}\left[CF_k\right]\mathbf{E}\left[CF_s\right]\mathbf{Cov}\left(e^{-\Phi(k)}, e^{-\Phi(s)}\right)$$

als Maßzahl für das Zinszufallsrisiko gewählt werden.

Über den Vergleich des Zinsrisikos mit dem biometrischen Risiko bei Lebensversicherungen ◄

- Bezüglich der Diversifizierbarkeit gilt für das Portfolio gemischter Kapitalversicherungen in Parker [1997] unter der Voraussetzung $c_j/c \equiv konst.$
  - Das biometrische Zufallrisiko ist diversifizierbar, d.h.

$$\lim_{c\to\infty}\mathbf{E}\left[\mathbf{V}\left[\frac{B}{c}\Big|\{\Phi(k)\}\right]\right] = 0.$$

  - Das Zinszufallsrisiko ist nicht diversifizierbar, d.h.

$$\liminf_{c\to\infty}\mathbf{V}\left[\mathbf{E}\left[\frac{B}{c}\Big|\{\Phi(k)\}\right]\right] > 0.$$

– Typeset by FoilTEX – Marko Helwich, 14. Juni 2004, Köln ■

Über den Vergleich des Zinsrisikos mit dem biometrischen Risiko bei Lebensversicherungen ◄

Neue Ergebnisse

- Die Diversifizierbarkeit des biometrischen Zufallsrisikos folgt für alle Portfolios von Versicherungsverträgen mit zufälligen jährlichen Zahlungsströmen CF_k der Form

$$CF_k = \sum_{i=1}^{c} A_i\, B_{(i,k)}\, C_{(i,k)} - \sum_{i=1}^{c} D_i\, E_{(i,k)}\, F_{(i,k)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

direkt aus der Unabhängigkeit der zukünftigen Lebensdauern.
(Voraussetzung konstanter Portfolioanteile kann ersatzlos gestrichen werden.)

- Mit dem Äquivalenzprinzip ist das Zinszufallsrisiko für die untersuchten Portfolios (Erlebensfall-, Todesfall- u. Rentenversicherungen) ebenfalls ohne die Voraussetzung konstanter Portfolioanteile nicht diversifizierbar.
- Durch Äquivalenzprinzip ergibt sich auch eine vereinfachte Form der Varianz des durchschnittlichen Policenverlustes. Es gilt dann

$$\mathbf{V}\left[\frac{L}{c}\right] = \frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathbf{E}\left[e^{-\Phi(k)}e^{-\Phi(s)}\right]\mathbf{E}\left[CF_k\, CF_s\right]. \quad (*)$$

– Typeset by FoilTEX – Marko Helwich, 14. Juni 2004, Köln ■

Über den Vergleich des Zinsrisikos mit dem biometrischen Risiko bei Lebensversicherungen ◄

- Vergleich der Zufallsrisiken mit der Differenz der Maßzahlen (biometrisches Zufallsrisiko - Zinszufallsrisiko → Vorzeichen)

$$Z := \mathbf{E}\left[\mathbf{V}\left[\frac{L}{c}\Big|\{\Phi(k)\}\right]\right] - \mathbf{V}\left[\mathbf{E}\left[\frac{L}{c}\Big|\{\Phi(k)\}\right]\right]$$

  - Für die Differenz der Maßzahlen gilt

$$Z = \frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathbf{E}\left[e^{-\Phi(k)}e^{-\Phi(s)}\right]\left(\mathbf{Cov}\left(CF_k, CF_s\right) - \mathbf{E}\left[CF_k\right]\mathbf{E}\left[CF_s\right]\right).$$

  - Berechnung der Maßzahldifferenzen Z für die betrachteten Portfolios
  - grafische Darstellung in Abhängigkeit von der Laufzeit n des Portfolios und für verschiedene versicherungstechnische Eintrittsalter $x_i, i = 1, \ldots, c$
  - Maßzahldifferenzen Z für verschiedene Versicherungsprodukte vergleichen → Vergleichbarkeit durch Standardisieren auf gleichen Leistungs- bzw. Prämienbarwert
  - leider nicht allgemein interpretierbar

– Typeset by FoilTEX – Marko Helwich, 14. Juni 2004, Köln ■

Beispiel: Portfolio Todesfallversicherungen

- Portfolio bestehend aus identischen Verträgen
- Verteilung der ganzzahlig gestutzten zukünftigen Lebensdauern nach DAV-Sterbetafel 1994 T für Männer
- Verzinsung mit dem Vasiček-Modell
  – Die Zinsintensität $(\phi(t))_{t\geq 0}$ ist gegeben durch

$$\phi(t) = \beta + (\phi - \beta)e^{-\alpha t} + \int_0^t \sigma e^{\alpha(s-t)} dW_s, \ t \geq 0,$$

  dabei sind $\alpha, \beta, \sigma, \phi$ positive Konstanten $(0.1, 0.06, 0.01, 0.08)$ und $(W_s)_{s\geq 0}$ ein Standard-Wiener-Prozess.

- jährlich vorschüssige Prämie $\pi = 1$

- Dargestellt sind die Maßzahldifferenz Z und die Varianz des durchschnittlichen Policenverlustes $V[L/c]$ (sowie $-V[L/c]$ als Vergleichsgröße) in Abhängigkeit von der Vertragslaufzeit n.
- Portfoliogröße $c = 1$

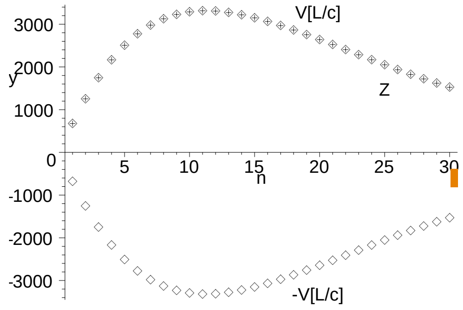

Abbildung 1: Eintrittsalter $x = 30$

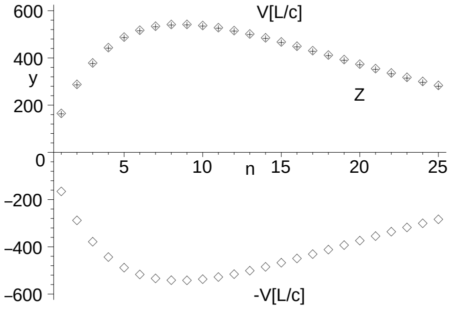

Abbildung 2: Eintrittsalter $x = 50$

- Portfoliogröße $c = 100$

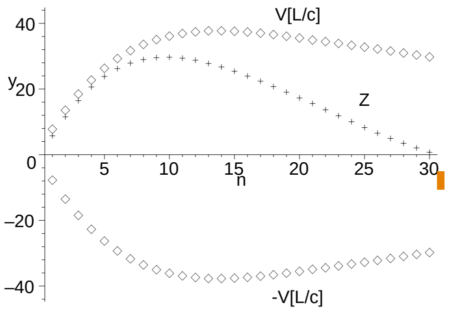

Abbildung 3: Eintrittsalter $x = 30$

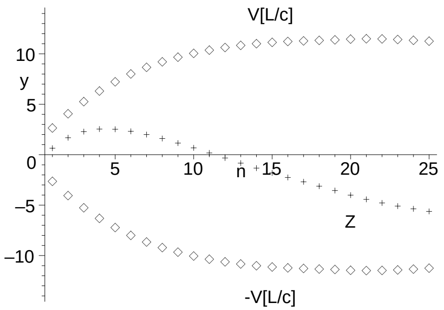

Abbildung 4: Eintrittsalter $x = 50$

- Portfoliogröße $c = 10000$

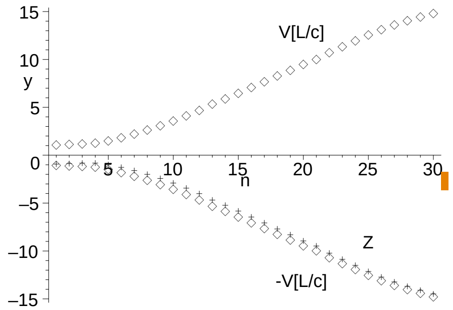

Abbildung 5: Eintrittsalter $x = 30$

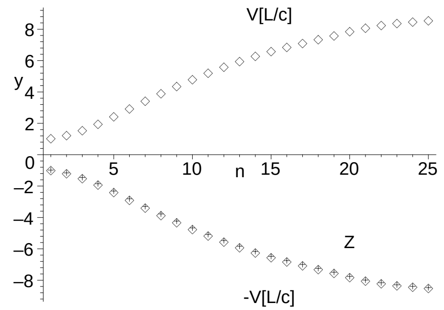

Abbildung 6: Eintrittsalter $x = 50$

Zum Vergleich - Ein Portfolio Erlebensfallversicherungen

- Portfoliogröße $c = 1$

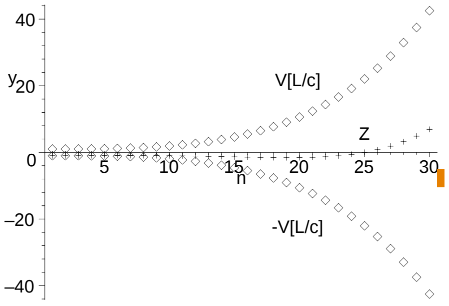

Abbildung 7: Eintrittsalter $x = 30$

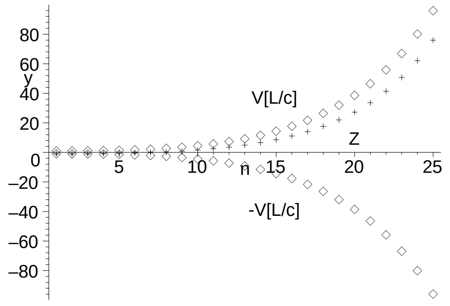

Abbildung 8: Eintrittsalter $x = 50$

- Portfoliogröße $c = 100$

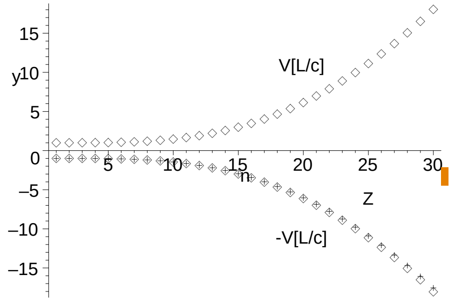

Abbildung 9: Eintrittsalter $x = 30$

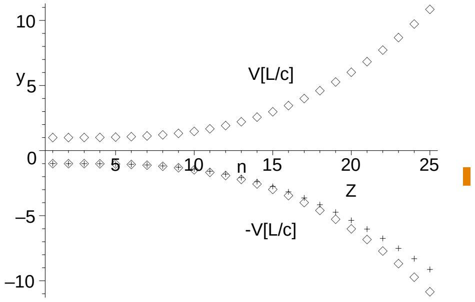

Abbildung 10: Eintrittsalter $x = 50$

Vorschläge zur Untersuchung des Änderungsrisikos

Ang & Sherris [1997] (*Interest rate management: ...*):

Interest rate risk is traditionally measured by the derivative of the security value with respect to the interest rate.

- diskontinuierliche Verzinsung, Periodenlänge ein Jahr
- Duration (Macauley, 1938 & Hicks, 1939)
  - Bei flacher Zinsstrukturkurve (konstante jährliche Zinssätze, $\phi_s = \phi, \forall s$) betrachte den Barwert B einer deterministischen Zahlungsstromfolge als Funktion des Zinssatzes ϕ, dann heißt

$$D_{mod} := -\frac{B'(\phi)}{B(\phi)}$$

die modifizierte Duration des Barwertes B.

- Ho [1992]: *Key rate duration measure of interest rate risk*
  - Bei nichtflacher Zinsstrukturkurve hängt der Barwert B einer deterministischen Zahlungsstromfolge mit Gesamtlaufzeit n von den jährlichen Zinssätzen $\phi_s, s = 1, \ldots, n$, ab. Dann ist

$$KRD_k := \frac{B_{k+} - B_{k-}}{B\, 2 \triangle\phi_k}$$

die k-te Key-Rate-Duration, wobei B_{k+} als Barwert der Zahlungsstromfolge mit $\phi_k + \triangle\phi_k$ statt ϕ_k und B_{k-} mit $\phi_k - \triangle\phi_k$ statt ϕ_k gebildet wird.

  - Bei gleicher Änderung der jährlichen Zinssätze ($\triangle\phi_k = \triangle\phi, \forall\, k = 1, \ldots, n$) ist die effektive Duration D_{eff} definiert als normierter zentraler Differenzenqoutient für die gleichzeitige Änderung aller jährlichen Zinssätze um $\triangle\phi$. Es gilt dann

$$D_{eff} = \sum_{k=1}^{n} KRD_k.$$

Ho [1992]:

Effective duration is the total risk exposure, and the key rate durations are the component parts of the effective duration.

Übertragung auf die Untersuchung der Änderungsrisiken

- Analog zur Darstellung der Diskontierungsfunktion v mittels der jährlichen Zinssätze $\phi_s, s = 1, \ldots, n$,

$$v(k) = \left(\prod_{s=1}^{k}(1+\phi_s)\right)^{-1} = \prod_{s=1}^{k}(1+\phi_s)^{-1},\ k = 1, \ldots, n,$$

gilt für die ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer K_x mit einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_{x+s-1}, s = 1, \ldots, n,$

$$P(K_x \geq k) = \prod_{s=1}^{k}(1 - q_{x+s-1}),\quad k = 1, \ldots, n.$$

Diese Ähnlichkeit beider Darstellungen ermöglicht eine Übertragung der Ideen für die Behandlung des Zinsänderungsrisikos auf das biometrische Änderungsrisiko.

Modellspezifizierung

- Modellvoraussetzungen wie oben: gleichartige Portfolios von Versicherungsverträgen, Einbeziehung von Prämien, stochastisch unabhängige zukünftige Lebensdauern, Äquivalenzprinzip
- deterministische Verzinsung, erwartete jährliche Zahlungsströme
- Zusatzvoraussetzungen
  - gleiche Lauf- und Aufschubzeiten für alle Verträge im Portfolio
  - identisch verteilte ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauern
- Beispiel Rentenversicherungsportfolio: erwarteter Portfolioverlust

$$\mathbf{E}[L] = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{c} S_i^R \mathbf{I}_{(\bar{k}+m \leq k < n)} - \pi_i \mathbf{I}_{(k < \bar{k})}\right)\prod_{s=1}^{k}\frac{(1-q_{x+s-1})}{(1+\phi_s)}$$

Maßzahlen für beide Änderungsrisiken

- Betrachte den erwarteten Verlust $\mathbf{E}[L]$ eines Versicherungsportfolios mit Laufzeit n als Funktion $\mathbf{E}[L] : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^1$ mit

$$(\phi_1, \ldots, \phi_n; q_x, \ldots, q_{x+n-1}) \mapsto \mathbf{E}[L] = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}[CF_k]\ v(k)$$

mit partiellen Ableitungen $\frac{\partial\, \mathbf{E}[L]}{\partial\, \phi_w}$ und $\frac{\partial\, \mathbf{E}[L]}{\partial\, q_{x+w-1}}$ für $w = 1, \ldots, n.$

- Die kumulierte Zinsduration ZD mit

$$ZD := \sum_{w=1}^{n} ZD_w \quad \text{wobei} \quad ZD_w := \frac{\partial\, \mathbf{E}\left[\frac{L}{c}\right]}{\partial\, \phi_w},\quad w = 1, \ldots, n,$$

sei als Maßzahl für das Zinsänderungsrisiko gewählt. Die einzelnen Summanden ZD_w werden für $w = 1, \ldots, n$ als w-te Zinsduration bezeichnet.

- Die kumulierte Bioduration BD mit

$$BD := \sum_{w=1}^{n} BD_w \quad \text{wobei} \quad BD_w := \frac{\partial\, \mathbf{E}\left[\frac{L}{c}\right]}{\partial\, q_{x+w-1}},\quad w = 1, \ldots, n,$$

sei die Maßzahl für das biometrische Änderungsrisiko. Wie oben sei BD_w für $w = 1, \ldots, n$ die w-te Bioduration.

- Definition der Maßzahlen basiert auf dem Konzept der Key-Rate-Durationen von Ho [1992]
Unterschiede
  - Differential- statt Differenzenquotient
  - Äquivalenzprinzip erspart Normierung (absolute statt relative Veränderung)
  - durchschnittlicher erwarteter Portfolioverlust (L/c statt L)

- Beispiel Rentenversicherungsportfolio: Mit dem Äquivalenzprinzip erhält man für die w-te Zins- bzw. Bioduration

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\, \mathbf{E}\left[\frac{L}{c}\right]}{\partial\, \phi_w} &= -\frac{1}{(1+\phi_w)}\,\frac{1}{c}\Bigg(\Big(\sum_{k=0}^{w-1}\sum_{i=1}^{c}\pi_i\prod_{s=1}^{k}\frac{(1-q_{x+s-1})}{(1+\phi_s)}\Big)\mathbf{I}_{(w<\bar{k})} \\
&\qquad +\Big(\sum_{k=\max(\bar{k}+m,w)}^{n-1}\sum_{i=1}^{c}S_i^R\prod_{s=1}^{k}\frac{(1-q_{x+s-1})}{(1+\phi_s)}\Big)\mathbf{I}_{(w\geq\bar{k})}\Bigg), \quad w=1,\ldots,n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\, \mathbf{E}\left[\frac{L}{c}\right]}{\partial\, q_{x+w-1}} &= -\frac{1}{(1-q_{x+w-1})}\,\frac{1}{c}\Bigg(\Big(\sum_{k=0}^{w-1}\sum_{i=1}^{c}\pi_i\prod_{s=1}^{k}\frac{(1-q_{x+w-1})}{(1+\phi_s)}\Big)\mathbf{I}_{(w<\bar{k})} \\
&\qquad +\Big(\sum_{k=\max(\bar{k}+m,w)}^{n-1}\sum_{i=1}^{c}S_i^R\prod_{s=1}^{k}\frac{(1-q_{x+s-1})}{(1+\phi_s)}\Big)\mathbf{I}_{(w\geq\bar{k})}\Bigg), \quad w=1,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

- unter verschiedenen Gesichtspunkten allgemein interpretierbar: bezüglich Vorzeichen, Änderungen für verschiedene Laufzeitjahre, Diversifizierbarkeit und bezüglich des Vergleiches beider Änderungsrisiken (nur verschiedene Vorfaktoren → biometrisches Änderungsrisiko betragsmäßig größer)

- Portfolio identischer Verträge (→ Maßzahlen unabhängig von der Policenanzahl)
- jährlich vorschüssige Prämie $\pi = 1$
  - für Eintrittsalter $x = 30$ über 30 Jahre gezahlt, Aufschubzeit 5 Jahre
  - für $x = 40$ über 25 Jahre gezahlt, keine Aufschubzeit
- konstanter Zinssatz $\phi = 0.0325$, DAV-Sterbetafel 1994 T Männer

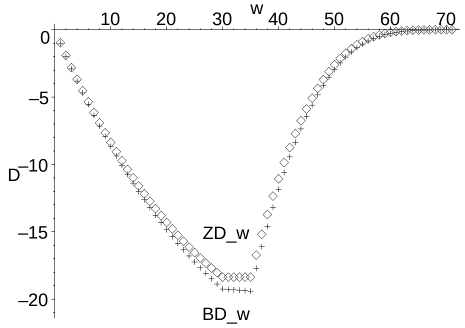

Abbildung 11: Eintrittsalter $x = 30$

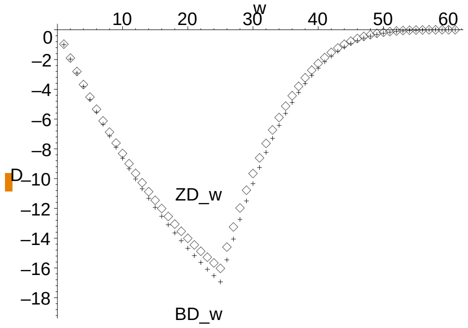

Abbildung 12: Eintrittsalter $x = 40$

- Portfolio identischer Erlebensfall-, Todesfall-, Rentenversicherungen mit gleichen Leistungsbarwerten
- Eintrittsalter $x = 30$

	kum. Zinsduration ZD	kum. Bioduration BD
Erlebensfallversicherung	-333.197	-346.35
Todesfallversicherung	-136.533	4115.91
Rentenversicherung	-561.679	-591.497

- Eintrittsalter $x = 40$

	kum. Zinsduration ZD	kum. Bioduration BD
Erlebensfallversicherung	-240.847	-251.735
Todesfallversicherung	-93.007	1752.604
Rentenversicherung	-360.081	-381.235

- Wichtig: keine Aussagen darüber, in welchem Maße sich die Zinssätze bzw. die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten verändern → Norberg [2001]

Herzlichen Dank
für Ihre Aufmerksamkeit!

Literaturliste zurück

Literaturangaben

- E. Marceau & P. Gaillardetz [1999] *On life insurance reserves in a stochastic mortality and interest rates environment,* in: INSURANCE: MATHEMATICS AND ECONOMICS 25, 1999, p. 261-280
- R. Norberg [2001] *On bonus and bonus prognoses in life insurance,* in: SCANDINAVIAN ACTUARIAL JOURNAL, No.2, 2001, p. 126-147
- A. Olivieri [2001] *Uncertainty in mortality projections: an actuarial perspective,* in: INSURANCE: MATHEMATICS AND ECONOMICS 29, 2001, p. 231-245
- G. Parker [1994] *Moments of the present value of a portfolio of policies,* in: SCANDINAVIAN ACTUARIAL JOURNAL, No.1, 1994, p. 53-67
- G. Parker [1997] *Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks,* in: NORTH AMERICAN ACTUARIAL JOURNAL Vol.1, No.2, 1997, p. 55-84

zurück

Über den Vergleich des Zinsrisikos mit dem biometrischen Risiko bei Lebensversicherungen ◄

- A. Ang & M. Sherris [1997] *Interest rate management: developments in interest rate term structure modelling for risk management and valuation of interest-rate-dependent cash flows,* in: NORTH AMERICAN ACTUARIAL JOURNAL Vol.1, No.2, 1997, p. 1-26
- D. Farny [2000] *Versicherungsbetriebslehre,* VVW Karlruhe 2000, 3. Auflage
- J.R. Hicks [1939] *Value and capital,* erschienen bei: Claredon Press, New York 1939, pp. 185-88
- T. Ho [1992] *Key rate duration measure of interest rate risk,* in: THE JOURNAL OF FIXED INCOME, 1992, p. 29-44
- F.R. Macauley [1938] *Some theoretical problems suggested by the movement of interest rates, bonds, yields, and stock prices in the united states since 1856,* erschienen bei: Columbia University Press, New York 1938
- H. Milbrodt & M. Helbig [1999] *Mathematische Methoden der Personenversicherung,* erschienen bei: Walter de Gruyter, Berlin 1999

zurück

– Typeset by FoilTEX – Marko Helwich, 14. Juni 2004, Köln ■