

20 Konvergenzgeschwindigkeit im Gesetz der großen Zahlen. Das Gesetz vom iterierten Logarithmus.

a) Konvergenzgeschwindigkeit im schwachen Gesetz der großen Zahlen

Sei $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine i.i.d. Folge reeller, $(P-)$ integrierbarer ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $a := EX_1$. Das schwache Gesetz der großen Zahlen besagt:

$$(20.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n - na| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

wobei $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ($n \rightarrow \infty$).

Besitzt die Verteilung $\mu = P_{X_1}$ eine endliche momenterzeugende Funktion, etwa

$$M(t) = E e^{tX_1} = \int e^{tx} \mu(dx) < \infty, \quad |t| < t_0 \quad (> 0),$$

so liegt in (20.1) sogar exponentielle Konvergenz vor (Satz von Chernoff-Cramér). Dabei spielt die Cramér-Transformierte $I = I_\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ eine wichtige Rolle, wobei

$$I(x) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \{tx - \log M(t)\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 20.1.

- a) I ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und konvex („Konjugierte“ der konvexen Funktion $t \mapsto \log M(t)$);
- b) $I(a) = I(EX_1) = 0$;
- c) $0 \leq I(x) < \infty$ für $x \in \{(\log M(t))' : |t| < t_0\} =: D$;
- d) Falls $\mu \neq \varepsilon_a$, so gilt:

$$I(x) = \sup_{t \geq 0} \{tx - \log M(t)\} \quad \text{auf} \quad [a, \infty) \quad \text{und} \quad \underline{\text{streng isoton}};$$

$$I(x) = \sup_{t \leq 0} \{tx - \log M(t)\} \quad \text{auf} \quad (-\infty, a] \quad \text{und} \quad \underline{\text{streng antiton}}.$$

Satz 20.1. (*Chernoff-Cramér*) Sei $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine i.i.d. Folge reeller, $(P-)$ integrierbarer ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $a := EX_1$ und bezeichne $I = I_\mu$ die Cramér-Transformierte der Verteilung $\mu = P_{X_1}$. Dann gilt für $n = 1, 2, \dots$:

$$\text{a) } P(S_n \geq nx) \leq \exp\{-n I(x)\} \quad \forall x \geq a;$$

$$\text{b) } P(S_n \leq nx) \leq \exp\{-n I(x)\} \quad \forall x \leq a;$$

wobei $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ($n \rightarrow \infty$).

Bemerkung 20.2.

a) Aus dem Satz von Chernoff-Cramér folgt noch:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\{-n I^*(\varepsilon)\} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

wobei $I^*(\varepsilon) := \min\{I(a + \varepsilon), I(a - \varepsilon)\}$.

Falls $M(t) < \infty$ ($|t| < t_0$ (> 0)), so folgt $0 < I^*(\varepsilon) \leq \infty \quad \forall \varepsilon > 0$, d.h., es liegt exponentielle Konvergenz vor.

b) Die exponentiellen Raten im Satz 20.1 sind optimal, denn man kann zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [P(S_n \geq nx)]^{\frac{1}{n}} = e^{-I(x)} \quad \forall x > a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [P(S_n \leq nx)]^{\frac{1}{n}} = e^{-I(x)} \quad \forall x < a,$$

falls $M(t) < \infty \quad \forall t: |t| < t_0$ (> 0) (Chernoff-Cramér).

Die Ergebnisse von Chernoff-Cramér sind grundlegend für die Theorie der (so genannten) Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen [“large deviations”], die u.a. bei Entropieuntersuchungen in der statistischen Physik eine wichtige Rolle spielen.

b) Konvergenzgeschwindigkeit im starken Gesetz der großen Zahlen.

Das Gesetz vom iterierten Logarithmus.

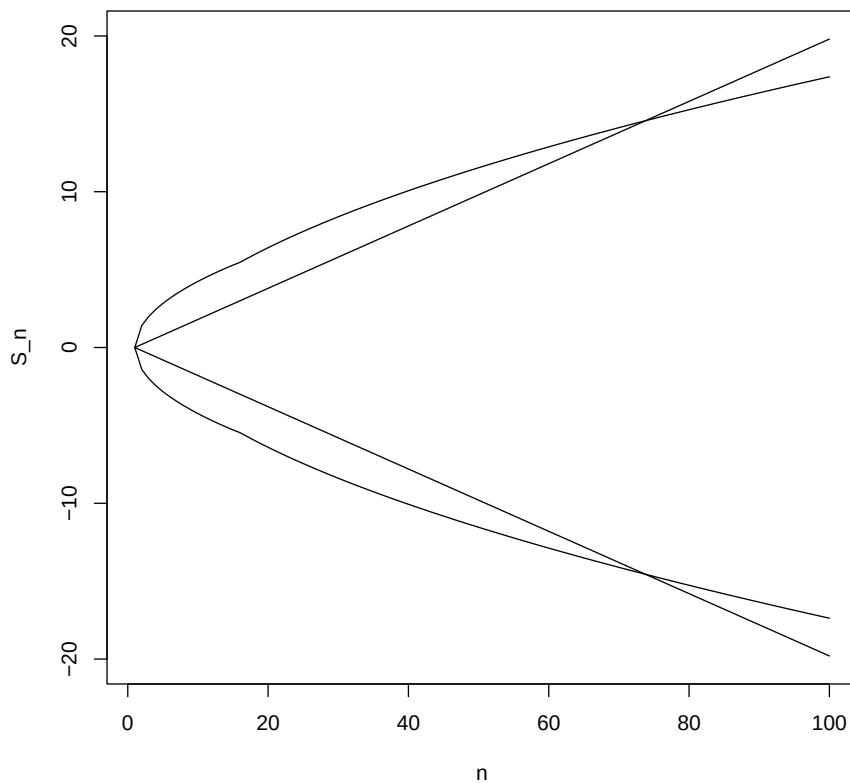
Sei $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine i.i.d. Folge reeller, zentrierter ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, d.h. mit $EX_1 = 0$, und sei $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ($n \rightarrow \infty$).

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt:

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Für die (so genannten) „Pfade“ $n \mapsto S_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$ fest, bedeutet dies:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein Ereignis $A(\varepsilon) \in \mathcal{A}$ mit $P(A(\varepsilon)) = 1$ derart, dass für $\omega \in A(\varepsilon)$ die Pfade $n \mapsto S_n(\omega)$ sich höchstens endlich oft (in n) außerhalb des Kegels mit den Schranken $n \mapsto n\varepsilon$ bzw. $n \mapsto -n\varepsilon$ befinden.



Frage: Gibt es eine Kurve $n \mapsto g(n)$, für die gilt:

- 1) Für P -fast alle $\omega \in \Omega$ laufen die Pfade $n \mapsto S_n(\omega)$ höchstens endlich oft über die Kurven $n \mapsto \pm(1 + \varepsilon)g(n)$ hinaus, $\varepsilon > 0$ beliebig;
- 2) Für P -fast alle $\omega \in \Omega$ laufen die Pfade $n \mapsto S_n(\omega)$ unendlich oft über die Kurven $n \mapsto \pm(1 - \varepsilon)g(n)$ hinaus?

Falls ja, so grenzen die Schranken $n \mapsto \pm g(n)$ das „Fluktuationsverhalten“ der (so genannten „Irrfahrt“ [„random walk“]) so scharf wie möglich ein.

Das „Gesetz vom iterierten Logarithmus“ gibt für quadratintegrierbare ZV. eine positive Antwort:

Satz 20.2. (Hartman-Wintner) Sei $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ eine i.i.d. Folge reeller ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $EX_1 = 0$, $Var(X_1) = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad P\text{-f.s.}, \\ \text{b)} \quad & \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = -1 \quad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Bemerkung 20.3.

- a) Das Gesetz vom iterierten Logarithmus liefert sofort eine Konvergenzgeschwindigkeitsaussage zum starken Gesetz der großen Zahlen, denn es gilt:

$$-1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \sqrt{\frac{n}{2 \log \log n}} < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \sqrt{\frac{n}{2 \log \log n}} = 1 \quad P\text{-f.s.},$$

d.h.

$$(20.2) \quad \left| \frac{S_n}{n} \right| \stackrel{P\text{-f.s.}}{=} \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\log \log n}{n}}\right),$$

und diese Rate kann nicht verbessert werden.

- b) Der Satz von Hartman-Wintner liefert das Gesetz vom iterierten Logarithmus für den i.i.d. Fall unter den schwächsten Voraussetzungen. Strassen (1966) hat gezeigt, dass aus der Gültigkeit von (20.2) im i.i.d. Fall bereits die quadratische Integrierbarkeit der $\{X_n\}$ folgt.
- c) Das Fluktuationsverhalten einer i.i.d. Irrfahrt $\{S_n\}$ wird noch deutlicher durch die folgende Verallgemeinerung von Satz 20.2 nach Strassen (1964):

Unter den Voraussetzungen von Satz 20.2 gilt für P -fast alle $\omega \in \Omega$:

$$H\left(\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{2n \log \log n}}\right) = [-1, 1],$$

wobei $H(a_n)$ die Menge der Häufungspunkte einer reellen Zahlenfolge $\{a_n\}$ bezeichnet.

Zum Beweis des Gesetzes vom iterierten Logarithmus und dessen Verschärfung durch Strassen vergleiche man z.B. Bauer (2002), Kapitel VII.